Exercice I. Montrer que $\det \begin{pmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{pmatrix} = (x-a)^3\ (x+3a)$.

Exercice II. Soit la matrice d'ordre n : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det A$ en fonciton de n.

2. Pour $n = 2$ et $n = 3$ calculer A^{-1}.

Exercice III. Soit $m \in \mathbb{R}$, et $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det A_m$

2. Calculer le rang de A_m.

Exercice IV. Calculer le rang et le déterminant des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice V. En distinguant les différents cas selon la valeur de $b \in \mathbb{R}$, résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & b \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & 1 \end{array} \right.$$

Existe-t-il une valeur de b pour laquelle le système admet une solution unique ?

Consultez régulièrement la page `http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2010/ma304`