Rappels de Géométrie *Pour toutes les questions faites des figures.*

Exercice I. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Soit D la droite vectorielle d'équation $2x + 3y = 0$. Donner le coefficient directeur et un vecteur directeur u de D. Soit v un autre vecteur directeur de D, quelle est la relation entre u et v. Donner une représentation paramétrique de D.

2. Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite vectorielle contenant le vecteur $u = (2, 3)$.

3. Tracer toutes les combinaisons linéaires à coefficients entiers des vecteurs $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (2, 1)$. Montrer que les vecteurs u_1 et u_2 engendrent $\mathbb{R}^2$.

4. Déterminer parmi les sous-ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 3x + 2y = 2\} \\
F_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 3x + 2y = 0\} \\
F_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\} \\
F_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\} \\
F_5 &= \{(u, 2u) | u \in \mathbb{R}\} \\
F_6 &= \{(2u + 3v, v) | u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Exercice II. Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$. Est ce que le complémentaire de D dans $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Exercice III. On se place maintenant dans $\mathbb{R}^3$.

1. On consière les plans d'équations

$$\begin{aligned}
2x + 3y + 4z &= 0 \quad (P1) \\
x + y + z &= 0 \quad (P2)
\end{aligned}$$

Donner une représentation paramétrique de $P1 \cap P2$.

2. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. L'ensembe S_1 des solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl}
2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\
x_1 & -4x_2 & +7x_3 & = & 0 \\
x_1 & +3x_2 & -6x_3 & = & 0
\end{array}\right.$$

2. L'ensemble S_2 des solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl}
2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \\
x_1 & -4x_2 & +7x_3 & = & 2 \\
x_1 & +3x_2 & -6x_3 & = & 3
\end{array}\right.$$

Sous-espaces vectoriels engendrés

Exercice IV. Soit E un espace vectoriel, et u, v deux vecteurs de E. Le vecteur u est-il combinaison linéaire de u et v ? Le vecteur nul de E est il combinaison linéaire de u et v ?

Exercice V. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (1, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1)$. Est-ce que les vecteurs $u = (2, 1, -1)$ et $v = (0, 0, 1)$ sont des combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3 ?

Exercice VI. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que les vecteurs $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (2, -1, 1)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (0, 1, 1)$. Donner une équation cartésienne du plan engendré par u_1 et u_2 (*indication : on cherchera une condition sur x, y, z pour que le vecteur (x, y, z) soit une combinaison linéaire de u_1 et u_2*).

Exercice VII. Dans $\mathbb{R}^4$, donner les équations définissant le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, 0, 1)$, $u_2 = (2, 3, 0, 3)$ et $u_3 = (3, 2, 1, 2)$.

Exercice VIII. Soient (u, v, w) trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, non colinéaires deux à deux. Peut-on affirmer que la famille (u, v, w) est libre ? Si oui, le démontrer, sinon, donner un contre-exemple.

Exercice IX. Soit (u_1, u_2, u_3) une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Est ce que les familles suivantes sont libres ou liées ?

$$(u_1, u_2, u_3, 0); \quad (u_1, u_1 + 2u_3, u_3); \quad (u_1, 2u_2, u_3).$$

Exercice X. Trouver une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs $a_1 = (3, 1, -1)$, $a_2 = (-1, 1, 2)$, $a_3 = (1, -1, 1)$, $a_4 = (5, -2, 3)$. Extraire de cette famille une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice XI. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les familles de vecteurs suivantes et trouver une base de ce sous-espace.

1. $u_1 = (2, 5, 7)$, $u_2 = (-1, 4, 0)$, $u_3 = (3, -1, 2)$.

2. $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (3, 2, 1)$, $u_3 = (3, 3, 3)$, $u_4 = (5, 0, -5)$.

Exercice XII. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs :

$v_1 = (1, -1, 0, 0), \quad v_2 = (1, 0, -1, 0) \quad v_3 = (1, 0, 0, -1) \quad v_4 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$

1. Vérifier que ces quatre vecteurs appartiennent au sous-espace vectoriel F d'équation $x + y + z + t = 0$.

2. (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle une famille libre de vecteur de $\mathbb{R}^4$?

3. (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

4. (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle une base de F ?

Consultez régulièrement la page `http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2010/ma304`