Changement de bases

Exercice I. On considère le plan $\mathbb{R}^2$ et sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ (avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). Soit les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Faire une figure.

2. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

3. Dessiner le vecteur $v = 2u_1 - u_2$.

4. Exprimer les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ d'un vecteur w par rapport à la base $\mathcal{B}'$ en fonction des coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de w par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$.

5. Dessiner et donner les coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}'$ des vecteurs $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice II. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner les matrices de passages de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ à la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$.

2. Donner les coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}'$ des vecteurs $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. Donner une équation de la droite vectorielle $x' + 3y' = 0$ par rapport à la base $\mathcal{B}$

4. Donner une équation de la droite vectorielle $2x - y = 0$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$

Exercice III. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, U_3)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner les matrices de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$

2. Donner les coordonées dans la base $\mathcal{B}'$ du vecteur $v_m = \begin{pmatrix} 2 \\ m \\ m-1 \end{pmatrix}$ où m est un réel.

Orthogonalité et produit scalaire

Exercice IV. Soit $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à $(2,-3,6)$.

1. Donner une équation de $\mathcal{P}$.

2. Trouver une base orthonormée de $\mathcal{P}$.

Exercice V. Soit $u_1 = (1,2,2)$, $u_2 = (1,0,1)$, et $u_3 = (1,1,0)$. Orthonormaliser cette base selon le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice VI. Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel engendré par $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

2. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

3. Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{P}$.

4. Donner une représentation paramétrique de la première bissectrice de la base $\mathcal{B}'$.

Exercice VII. Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équations $\left\{ \begin{array}{rcl} x - 4y + z + 3t & = & 0 \\ 2x - y + z + t & = & 0 \end{array} \right.$.
Soit $\mathcal{Q}$ le plan vectoriel orthogonal à $\mathcal{P}$.

1. Donner une base de $\mathcal{Q}$.

2. Donner une base de $\mathcal{P}$.

3. En déduire les équations de $\mathcal{Q}$.

Exercice VIII. Caculer le volume du tétraèdre $ABCD$ où les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Application linéaires

Exercice IX. On considère la droite vectorielle $\mathcal{D}$ d'équation $y - 2x = 0$ et p la projection sur la droite $\mathcal{D}$ parallèlement au vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour un vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, calculer le vecteur w de $\mathcal{D}$ tel que $u - w$ est colinéaire à u.

2. En déduire les coordonnées de $p(v)$ et la matrice de l'application linéaire p.

3. Donner une équation du noyau de p.

Exercice X. On considère l'application linéaire $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Dessiner les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\rho(u)$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\rho(v)$.

2. Montrer que pour tout vecteur u du plan $\|\rho(u)\| = \|u\|$.

3. Montrer que pour tout vecteur u, l'angle $(u, \rho(u))$ est $\frac{-\pi}{3}$

Exercice XI. On considère dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ de base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ (avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$), l'application linéaire f, telle que $f(e_1) = u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f(e_2) = -u$.

1. Donner la matrice A de f.

2. Déterminer le noyau de f.

3. Déterminer l'image de f.

4. Montrer que pour tout vecteur v du plan $f(f(v)) = v$ et vérifier que $A^2 = I_2$.

Exercice XII. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y, z, t) = (z, x + y + z - t, x + z)$.

1. Donner la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et R^3.

2. Calculer le noyau de f.

3. Calculer l'image de f.

4. Est ce que f est injective ? Surjective ?

Exercice XIII. Soient f et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ les applications linéaire dont les matrices sont respectivement :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer les noyaux et les images de f et g.

2. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Exprimer $(g \circ f)(u)$.

3. Vérifier que la matrice de $(g \circ f)$ est égal à $B.A$.