

Un devoir à la maison est avant tout un exercice de rédaction. Puisque vous en avez le temps vous devez apporter un grand soin à la présentation et à la rédaction.

On se propose dans ce devoir d'étudier la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

Soit $u_n = \frac{1}{n}$, pour $n \geq 1$, et $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$ la suite des sommes partielles.

1. Rappeler la nature de la série harmonique.
2. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que $\frac{1}{n+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$.
3. En déduire que pour tout entier N , $\ln(N+1) \leq S_N \leq 1 + \ln N$.
4. Montrer que $S_N \sim_{N \rightarrow +\infty} \ln N$.

On considère, pour $N \geq 1$, $V_N = S_N - \ln(N+1)$ et, pour $n \geq 1$, $v_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})$.

5. Montrer que $(V_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
6. Donner un équivalent de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et en déduire que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

On appelle $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} V_N$ la **constante d'EULER**.

7. Montrer que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \varepsilon_1(N)$ où ε_1 est une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$.
8. Montrer que la suite $(V_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et que la suite $(V_N + \frac{1}{N+1})_{N \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante (*Vous pourrez utiliser l'inégalité de la question 2.*).
9. En déduire que pour tout $N \geq 1$, $V_N \leq \gamma \leq V_N + \frac{1}{N+1}$.
10. Donner un encadrement de γ à 0.1 près.

Les questions suivantes sont facultatives.

On considère, pour $N \geq 1$, $W_N = \gamma - V_N$ et, pour $n \geq 1$, $w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

11. Calculer pour $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^N w_n$ et $\sum_{n=N}^{+\infty} w_n$.
12. Montrer que $v_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n}{2}$.
13. Montrer que $W_N \sim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} w_n$.
14. En déduire que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} + \frac{1}{N} \varepsilon_2(N)$ où ε_2 est une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$.