Université Aix-Marseille III – licence de mathématiques et informatique – 2e année		
Analyse 2 (MA301)	–	Marseille - Saint-Jérôme et Aix - Montperrin
lundi 10 janvier 2011	–	enseignant : T. COULBOIS

Examen

Ni calculatrices, ni documents. 3 heures.

Exercice I. **1.** **(Cours, 2 points)** Montrer que si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ est convergente et que $\sin(x^2)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

3. **(Cours, 2 points)** Donner la définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.

4. **(Cours, 2 points)** Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

Exercice II. Étudier la convergence de

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, **2.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$, **3.** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (\sqrt{n^2+1} - n)$

4. pour $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\frac{a}{n+1} - \frac{1}{n})$, **5.** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin n}{n}$.

Exercice III. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{n \sin x}{n+x} dx$.

Exercice IV. On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2} \sin(nx) \end{array}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que la somme $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$ calculer $b_k = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\,dx$.

Rappel : $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Tournez la page

Exercice V. Soit $f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) = \sqrt{t} \end{array}$. On définit sur $[0,1]$ la suite de fonctions $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$p_0(t) = 0, \quad p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2), \quad t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

1. a. Calculer p_1 et p_2.

b. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que les applications p_n sont polynômiales.

2. a. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - p_n(t))\Big(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))\Big).$$

b. En déduire que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t}$.

3. a. Soit $t \in [0,1]$ fixé. Montrer que la suite $(p_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b. En déduire que la suite de fonctions $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une limite que l'on déterminera.

4. a. En utilisant la relation du 2.(a), montrer que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \sqrt{t}\Big(1 - \frac{1}{2}\sqrt{t}\Big)^n.$$

b. Soit $n \geq 1$ fixé. En étudiant la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x(1 - \frac{x}{2})^n$, montrer que

$$|p_n(t) - f(t)| \leq \frac{2}{n+1}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^n, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

5. Montrer que la suite de fonctions $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.