Exercice I. Pour chacune des intégrales généralisées suivantes, calculer explicitement l'intégrale tronquée, étudier la convergence et le cas échéant calculer l'intégrale.

1. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$, **2.** $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2}$, **3.** $K = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$, **4.** $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1-t}$.

5. $M = \displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^2+2t+2}$,

Exercice II. Pour chacune des fonctions f suivantes donner un équivalent en $+\infty$ et en déduire la convergence (ou non) de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

1. $f(t) = \dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}}$, **2.** $f(t) = \dfrac{1}{t+\sin t}$, **3.** $f_\alpha(t) = t^\alpha(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}})$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice III. En utilisant des comparaisons avec les fonctions de références, étudier la convergence des intégrales suivantes

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$, **2.** $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\,dt$, **3.** $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt$.

Exercice IV. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt$, **2.** $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\,dt$. **3.** $K_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$, $\alpha > 0$,

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\,dt}{\sqrt{(1-t)^3}}$, **5.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)\,dt}{t^2+1}$, **6.** $L_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}})\,dt$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice V. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les intégrales convergent

1. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(t-1)^b}$, **2.** $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,dt$.

Exercice VI. Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes et calculer leur différence

1. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt$, **2.** $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,dt$.

Exercice VII. **Fonction Gamma.** Soit $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ est convergente. On note $\Gamma(n)$ sa valeur.

2. Trouver une relation entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$.

3. Calculer $\Gamma(0)$ et $\Gamma(1)$.

4. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice VIII. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose la fonction f bornée : il existe une constante M telle que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\, dt$ existe pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\, dt$.

3. Même question en supposant maintenant qu'il existe deux constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall\, t \geq A, \qquad |f(t)| \leq e^{\alpha t}.$$

Exercice IX. **1.** Etudier la nature des intégrales dépendant du paramètre k, ($k \in \mathbb{N}$) données par

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2}\, dt$$

2. Calculer les I_k en mettant tout d'abord en évidence une relation de récurrence ($I_p = \frac{2}{p+1} I_{p+2}$). On donne $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice X. **1.** Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha}\, dt$ sont absolument convergentes pour tout réel $\alpha > 1$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\, dt$ diverge pour $0 < \alpha \leq 1$.

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt$ est convergente pour tout réel α tel que $0 < \alpha \leq 1$.

4. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt$, $\alpha > 0$?

5. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}\, dt$?

Exercice XI. Soient deux réels a et b tels que $0 < a < 1 < b$. En fonction des réels α et β, donner la nature des intégrales de Bertrand définies comme suit

$$I = \int_b^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}, \qquad J = \int_0^a \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}.$$

1. Premier cas : $\alpha > 1$, on écrit $\alpha = 1 + 2h$, avec h>0.

2. Deuxième cas : $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

3. Troisième cas : $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$.

4. Quatrième cas : $\alpha < 1$, on écrit $\alpha = 1 - 2h$, avec h>0.

Consultez régulièrement la page `http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2011/analyse2`