Exercice I. Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence, calculer les premiers termes et donner le terme général.

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \end{cases}$, **2.** $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_2 = 0 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$, **3.** $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$

Exercice II. Montrer par récurrence que pour tout entier N, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

Exercice III. Calculer les sommes partielles et préciser la nature des séries

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(3 + \frac{1}{3^n}\right)$, **2.** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)$, **3.** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin n$ *(utilier les exponentielles complexes).*

Exercice IV. Étudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants, (on pourra utiliser les règles de comparaison).

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 0$, **2.** $u_n = \dfrac{1}{10n+1}$, $n \geq 0$, **3.** $u_n = \ln \dfrac{2+n^2}{1+n^2}$, $n \geq 1$,

4. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, **5.** $u_n = \dfrac{a}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, $a \in \mathbb{R}$, **6.** $u_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$

7. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. **8.** $u_n = n\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right)$, $n \geq 1$.

Exercice V. **1.** Étudier la nature de la série numérique de terme général.

$$u_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}, \quad n \geq 0.$$

2. Montrer que $u_n = \frac{3}{3n+1} - \frac{3}{3(n+1)+1}$.

3. En déduire le terme général de la série $\sum u_n$ et sa somme.

Exercice VI. Une série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ est dite **télescopique** si le terme général a_n peut s'écrire $a_n = b_{n+1} - b_n$ pour une certaine suite numérique $(b_n)_{n\geq 1}$.

1. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n = b_{k+1} - b_1$.

2. Montrer que la série converge ssi la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$ existe et qu'on a alors,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n - b_1.$$

Exercice VII. On considère $c_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Soit $a_n = \frac{1}{c_n}$. Écrire a_n sous la forme $b_{n+1} - b_n$.

2. Évaluer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. On considère maintenant $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Écrire a_n sous la forme $b_{n+1} - b_n$ et en déduire le terme général de la suite des sommes partielles de a_n.

Exercice VIII. Étudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$, $n \geq 1$. **2.** $u_n = \frac{n}{2^n}$, $n \geq 1$. **3.** $u_n = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{3^n n!}$, $n \geq 1$.

4. $u_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^n}$, $n \geq 1$. **5.** $u_n = \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{(2n+1)}$, $n \geq 1$.

Exercice IX. Étude de la série harmonique.

On considère la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$. On note S_N la N^e somme partielle de cette série et on pose

$$T_N = S_N - \ln(N+1).$$

1. Montrer que

$$\forall\, x > 0, \quad \ln(1+x) - \ln x \leq \frac{1}{x}.$$

2. En déduire que la suite $(T_N)_{N \geq 1}$ est croissante.

3. Que vaut T_1 ? En déduire $\forall\, N \geq 1, \quad S_N \geq \ln(N+1)$.

4. En déduire $\lim_{N \to +\infty} S_N$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est-elle convergente ?

5. Soit pour $N > 1$, $U_N = T_N - T_{N-1}$. Donner un équivalent de U_N quand N tend vers $+\infty$.

6. En déduire que la série $\sum U_N$ converge et donc que la suite (T_N) converge.

*(La limite de (T_N) est la constante d'*EULER *γ et on peut écrire :*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \epsilon(N) \ \textit{où} \ \lim_{N \to +\infty} \epsilon(N) = 0.)$$

Exercice X. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, **2.** $u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$, **3.** $u_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$.

4. $u_n = (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$. **5.** $u_n = \frac{n+3}{(-1)^n \sqrt{n} - 3n}$, **6.** $u_n = \frac{1 + (-1)^n n}{n^2}$.

Exercice XI. **1.** Discuter la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{25n}$, pour $n \geq 1$ et estimer sa somme sans dépasser l'erreur tolérée de 10^{-2}.

2. Discuter la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+3}$, pour $n \geq 1$.

Exercice XII. Étudier les séries de termes généraux suivants

1. $u_n = \dfrac{e^{in\theta}}{\ln(n)}$, $n \geq 2$. **2.** $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n+\cos(n)}$, $n \geq 1$. **3.** $u_n = \dfrac{\cos(n\theta)}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

Exercice XIII. Montrer que les séries de termes généraux positifs a_n et $\dfrac{a_n}{1+a_n}$ sont de même nature.

Exercice XIV. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels.

1. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge vers S, alors $\sum_{n\geq 0}(a_n + a_{n+1})$ converge et calculer sa somme.

2. Supposons que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\sum_{n\geq 0}(a_n + a_{n+1})$ converge vers T, alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et calculer sa somme.

3. Donner un exemple où au contraire, $\sum_{n\geq 0}(a_n + a_{n+1})$ converge et $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge.