Université Aix-Marseille III – licence de mathématiques et informatique – 2e année
Complément en intégration (MA303) – Marseille - Saint-Jérôme et Aix - Montperrin
mercredi 5 janvier 2011 – enseignant : T. COULBOIS

Examen

Ni calculatrices, ni documents. 1 heure 30.

Exercice I. (Cours, 6 points) Montrer que toute fonction continue est intégrable au sens de RIEMANN (on admettra le théorème de HEINE).

Exercice II. Calculer en précisant le domaine de validité les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int x \ln x \, dx$, En intégrant par parties on trouve $x^2/2 \ln x - x^2/4$. L'intégration par parties est valable sur $]0;+\infty[$, mais le résultat est valable sur $[0;+\infty[$, si on prolonge par continuité en 0 par la valeur 0 à la fois la fonction et sa primitive.

2. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin\theta}$, On calcule une primitive pour $\theta \in]0;\pi[$. En posant $u = \cos\theta \in]-1;1[$, on se ramène à $\displaystyle\int \frac{du}{u^2-1}$, en décomposant en éléments simples on arrive à $\frac{1}{2}\ln\frac{1-u}{u+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta+1}$

3. $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx$, En intégrant deux fois par parties on trouve $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ validité : $\mathbb{R}$

4. $\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^3}$. On décompose la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad \frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{t^2-t+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2-t+1}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2-t+1}\right) + \frac{2}{3}\frac{1}{(\frac{2\sqrt{3}}{3}(t-\frac{1}{2}))^2+1}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ est donc

$$t \mapsto \frac{1}{3}\ln|1+t| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Exercice III. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ admet-elle des primitives sur $\mathbb{R}$? *(Justifiez votre réponse, les réponses partielles seront valorisées)*

La fonction $F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} x^2 \cos \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme produit et composée de fonctions usuelles. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $F'(x) = \sin \frac{1}{x} + 2x \cos \frac{1}{x}$.

En 0 par le théorème des gendarmes F est continue. En calculant le taux d'accroissement en 0, on montre en utilisant le théorème des gendarmes que F est aussi dérivable en 0 et que $F'(0) = 0$.

La fonction $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 2x \cos \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc admet une primitive G sur $\mathbb{R}$.

La fonction $H = F - G$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions dérivables et bien sûr, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $H'(x) = f(x)$: c'est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.