

Ni calculatrices, ni documents. 1 heure.

Exercice I. (cours, 6 points) 1. Montrer que la limite simple d'une suite de fonctions croissante est croissante.

2. Définir la convergence uniforme d'une suite de fonctions.

Exercice II. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$.

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2. En effectuant un développement limité, montrer que $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n}$

3. En déduire la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

5. En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n u_n$ converge (*vous rappellerez précisément les hypothèses du théorème utilisé*).

Exercice III. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère les fonctions

$$\begin{array}{ll} f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} & \text{et } g_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f_n(x) = x^n(1 - x^n) & x \mapsto g_n(x) = x^n(1 - x) \end{array}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ étudier la fonction f_n et calculer son maximum.

3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément.

4. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément.

Ni calculatrices, ni documents. 1/2 heure

Exercice IV. (cours, 6 points). Donner la définition de l'intégrale au sens de RIEMANN.

Exercice V. On considère la fonction $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) = \sin(\ln x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Donner une primitive F de f en précisant le domaine de validité (*vous pourrez intégrer par parties*).

2. Montrer que F est prolongeable en 0.

3. f admet-elle des primitives sur $[0; +\infty[$?