

Exercice I. Théorème de DARBOUX

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée. Soit $a, b \in I$. On suppose pour simplifier que $a < b$ et que $f'(a) < f'(b)$. Soit $\xi \in [f'(a); f'(b)]$. On se propose de montrer que la valeur intermédiaire ξ est atteinte par la dérivée f' .

1. Montrer que $\xi \in [f'(a); \frac{f(b)-f(a)}{b-a}] \cup [\frac{f(b)-f(a)}{b-a}; f'(b)]$. On suppose désormais pour simplifier que $f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et que $\xi \in [f'(a); \frac{f(b)-f(a)}{b-a}]$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est continue sur $]a; b]$. En déduire qu'il existe $c \in]a; b]$ tel que $\xi = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.
3. Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.
4. Conclure que la fonction f' a la propriété des valeurs intermédiaires.

Exercice II. Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

1. Pour $\epsilon > 0$ et $x_0 > 0$ trouver $\eta = \eta(\epsilon, x_0) > 0$ tel que $\forall x \in]0; +\infty[$, si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
2. Montrer que f n'est pas uniformément continue sur $]0; +\infty[$.

Exercice III. 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I dont la dérivée est bornée. Montrer que f est uniformément continue sur I .

2. Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$$

- a. Montrer que la dérivée de f n'est pas bornée sur $]0; \infty[$.
- b. Pour $\epsilon > 0$, trouver $\eta = \eta(\epsilon) > 0$ tel que $\forall x, x' \in [0; +\infty[$,

$$|x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

- c. En déduire de f est uniformément continue sur $[0; +\infty[$

Exercice IV. Soit la fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} f(x) = \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est intégrable au sens de RIEMANN.
2. Montrer que f n'est pas la limite uniforme de fonctions en escalier sur $[0; 1]$.

Exercice V. Sommes de RIEMANN : calculer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$
2. $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$
3. $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin \frac{k\pi}{n}$
4. $t_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \sin \frac{k}{n^2}$ (on pourra montrer que $w_n - t_n$ tend vers 0).

Exercice VI. 1. Montrer que l'intégral $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est convergente.

2. Montrer que $I = \pi$

3. En utilisant les sommes de RIEMANN, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{\sqrt{n^2 - k^2}} = \pi.$$

Exercice VII. On considère la formule de calcul approché de l'intégrale suivante :

$$\int_0^2 f(t) dt = af(x_1) + bf(x_2)$$

1. Quelles relations doivent satisfaire, a , b , x_1 et x_2 pour que la formule soit exacte pour
 1. les fonctions constantes,
 2. les fonctions affines,
 3. les fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2.
2. Donner des valeurs possible de a , b , x_1 et x_2