Notes de cours et documents interdits. 1 heure 30.

Exercice I. **(Cours, 6 points) 1.** Qu'est-ce qu'un espace des possibles équiprobable ?

2. Qu'est-ce que deux événements indépendants ?

3. Définir la densité d'une variable aléatoire réelle.

Exercice II. Marc s'entraine seul au poker. Il pioche 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Calculer la probabilité pour qu'il possède un carré d'as (quatre as).

Nous prenons comme espace des possibles Ω l'ensemble des parties à 5 éléments du jeu de carte. Le cardinal de Ω est le nombre de combinaison

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 201376.$$

C'est un espace des possibles équiprobable.
L'événement A : carré d'as correspond alors à l'ensemble des mains de la forme : { as de pique, as de cœur, as de carreau, as de trêfle, n'importe quelle autre carte}. Le cardinal de A est donc $32 - 4 = 28$.
La probabilité de l'événement A est donc

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{28}{201376} = \frac{1}{7192} = 0,000139.$$

Il y a donc un peu plus de 1 chances sur 10000 de tirer un carré d'as.

2. Marc dévoile deux as. Quelle est la probabilité qu'il possède en fait un carré d'as ?

Soit l'événement B avoir au moins deux as. Cet événement est la réunion disjointe des événements avoir deux as, avoir trois as et avoir quatre as. Donc B a pour cardinal

$$\begin{aligned} |B| &= \binom{4}{2} \times \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{28}{1} \\ &= 6 \times \frac{28 \times 27 \times 26}{6} + 4 \times \frac{28 \times 27}{2} + 28 \\ &= 21196. \end{aligned}$$

La probabilité de A sachant B est donc

$$p(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A|}{|B|} = \frac{28}{21196} = \frac{1}{757} = 0,00132.$$

La probabilité que Marc possède un carré d'as sachant qu'il a dévoilé deux as est donc de 1,3 chance sur 1000.

Exercice III. La tolérance des résistances de 300Ω est de 5% pour la production courante, donnant donc $[285; 315]$ comme intervalle de tolérance.

Supposons qu'on ait une production de résistances qui suit une loi de Gauss non centrée exactement sur le nominal : $X \sim \mathcal{N}(\mu = 298; \sigma^2 = 25)$.

1. Quelle est la proportion de la production qui est non conforme ? Exprimer cette proportion en nombre moyen de résistances non conformes par million.

Soit Y la variable aléatoire $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Y suit une loi normale centrée réduite. On a l'équivalence

$$X \in [285; 315] \iff Y \in [-2,6; 3,4].$$

On lit dans la table de la gaussienne que

$$p(Y \leq 3,4) = 0,99966, \text{ et } p(Y \leq 2,6) = 0,9953.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} p(X \notin [285; 315]) &= p(Y > 3,4) + p(Y \leq -2,6) \\ &= 1 - p(Y \leq 3,4) + 1 - p(Y \leq 2,6) \\ &= 0,00524 = 0,524\%. \end{aligned}$$

La proportion de résistances non conforme est $0,524\%$ soit 5240 par million.

2. Si on réussissait à centrer la production sur le nominal, que deviendrait ce nombre ?

Soit $X' \sim \mathcal{N}(300; \sigma^2 = 25)$ la nouvelle variable aléatoire. Alors avec des calculs similaires on obtient

$$\begin{aligned} p(X' \notin [285; 315]) &= p(Y > 3) + p(Y < -3) \\ &= 2(1 - p(Y < 3)) = 2(1 - 0,99865) \\ &= 0,00270 = 0,27\%. \end{aligned}$$

La proportion de résistances non conforme est alors de $0,27\%$ soit 2700 par million.

Exercice IV. En France un sondage politique porte en général sur un échantillon de 1000 personnes.

1. Quelle est la fourchette d'erreur au seuil de confiance de 95% ?

On suppose que le sondage n'a que deux réponses possible A et B. On modélise la réponse d'un individu par une variable aléatoire gaussienne de moyenne m et d'écart type $\sigma = 1/2$. La réponse des N personnes interrogées (ici $N = 1000$) est une variable aléatoire X qui est la moyenne de N variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(m, \frac{1}{2})$. X suit donc une loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \frac{1}{2\sqrt{N}})$. La fourchette d'erreur e au seuil $\alpha = 95\%$ est défini pour que l'on ait 95% de chances que l'échantillon choisi donne un résultat dans l'intervalle $[m - e; m + e]$.
La variable aléatoire $Y = 2\sqrt{N}(X - m)$ suit une loi normale centrée réduite. Pour $y = 2\sqrt{N}e$, on a l'équivalence

$$X \in [m - e; m + e] \iff Y \in [-y; +y].$$

On lit dans la table de la loi normale centrée réduite que $p(Y \leq 1,96) = 0,9750$. On en déduit que

$$\begin{aligned} p(Y \in [-1,96; 1,96]) &= p(Y \leq 1,96) - p(Y \leq -1,96) \\ &= p(Y \leq 1,96) - (1 - p(Y \leq 1,96)) \\ &= 2p(Y \leq 1,96) - 1 = 0,95 = 95\%. \end{aligned}$$

La valeur de y est donc $y = 1,96$.
Pour

$$e = y/(2\sqrt{N}) = 1,96/(2\sqrt{1000}) = 0,0310 = 3,1\%$$

la probabilité que le résultat donné par le sondage auprès de 1000 personnes soit conforme à la réalité à $3,1\%$ près est de 95%.
La fourchette d'erreur au seuil de confiance de 95% est de 3,1%.

2. Si on veut une fourchette d'erreur de 3% au seuil de confiance de 99% quelle taille d'échantillon faudrait-il choisir ?

En reprenant les calculs précédents, on lit dans la table de la loi normale centrée réduite que $P(Y \leq 2,58) = 99,51\%$ et donc pour $3\% = e = 2,58/(2\sqrt{N})$ la fourchette d'erreur est de 3% au seuil de confiance de 99%. En résolvant on trouve

$$N = (2,58/(2 \times 0,03))^2 = 1849.$$

Il faut un échantillon de près de 2000 personnes pour avoir une fourchette d'erreur de 3% au seuil de confiance de 99%.