Consultez régulièrement la page `http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2011/ma608`

Exercice I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } |x| \leq \log 2 \\ 0 & \text{si } |x| \geq \log 2 \end{cases}$$

1. Tracer une représentation graphique de f.

2. Montrer que f est une densité de probabilité.

3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f comme densité. Déterminer la fonction de répartition F_X de X et l'espérance de X.

4. On pose $Y = |X|$. Calculer la loi de Y.

Exercice II. Soit X une variable aléatoire ayant pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien la densité d'une variable aléatoire réelle.

2. Calculer $E(X)$, l'ésperance de X.

3. En utilisant l'inegalité de Markov, montrer que pour tout $M > 0$

$$\int_M^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2M}$$

Exercice III. On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et U. X suit la loi gaussienne normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U suit la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $Y = UX$.

1. Montrer que :

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}([U = 1] \cap [X \leq x]) + \mathbb{P}([U = -1] \cap [X \geq -x])$$

2. En déduire que Y suit la même loi que X. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Calculer l'espérance de U puis montrer que $\mathbb{E}[XY] = 0$.

Exercice IV. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq -1 \\ \frac{1+x}{2} \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } 1 \leq x \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de F_X ainsi que celui de la densité de X.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice V. Soit U_1, U_2 des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0; 1]$. On note $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$. Soit a, b tels que $0 \leq a \leq b \leq 1$.

1. Calculer $P(a \leq X \leq b)$. En déduire la densité de X.

2. Soit $D = Y - X$. Calculer la densité de D.

Exercice VI. Soit X une variable aléatoire normale de moyenne -1 et d'écart-type 2. En utilisant la table ci-dessous, calculer les nombres suivants :

$$P(X \geq 0), \quad P(-2 \leq X \leq -1), \quad P(X \notin [-2;0])$$

Exercice VII. Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes est gaussienne.

Exercice VIII. La tolérance des résistances de 300Ω est de 5% pour la production courante, donnant donc $[285;315]$ comme intervalle de tolérance.

Supposons qu'on ait une production de résistances qui suit une loi de Gauss non centrée exactement sur le nominal : $X \sim \mathcal{N}(\mu = 298; \sigma^2 = 25)$.

1. Quelle est la proportion de la production qui est non conforme ? Exprimer cette proportion en nombre moyen de résistances non conformes par million. On simplifie souvent en parlant de nombre de non conformes par million, mais il s'agit bien d'une moyenne de non conformes par million. Expliquer.

2. Si on réussissait à centrer la production sur le nominal, que deviendrait ce nombre ?

Le **rapport de capabilité** pour une production gaussienne centrée est défini par

$$RC = \frac{\text{LST} - \text{LIT}}{6\sigma}$$

où LST est la limite supérieure de tolérance et LIT est la limite inférieure de tolérance. On dit, simplement, qu'un procédé est **capable**, lorsque RC ≥ 1.

3. Calculer le rapport de capabilité de la production des résistances (dans le cas de la gaussienne centrée).

4. Supposons que pour un procédé centré tel que RC= 1, on réussisse, grâce à une expérimentation statistique bien conçue, à passer de σ à 0.95σ, quel est le nouvel RC ? Et à combien de non conformes par million s'établit maintenant la production ?

5. Supposons que la compagnie veuille vendre au secteur médical, extrêmement lucratif, pour lequel les capabilités exigées sont de $4/3$. De quelle proportion minimale devra-t-elle réduire l'écart type de sa production qu'elle devra aussi maintenir centrée ?

6. Si la compagnie réalisait cela, à combien de non conformes par million de produits pourra-t-elle fonctionner ?

Exercice IX. On laisse tomber une aiguille de 2cm sur un parquet en bois dont les lattes ont une largeur de 5cm. Quelle est la probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux lattes ?

Pour les exercices VI et VIII ont donne les valeurs suivantes de la fonction de répartition pour une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite :

x	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,6$	3	$3,15$	$3,4$	4
$P(X \leq x)$	$0,69146$	$0,84134$	$0,93319$	$0,97725$	$0,99534$	$0,99865$	$0,99918$	$0,99966$	$0,999\,984$