

TD1 - Intégrales généralisées

Exercice I. Pour chacune des intégrales généralisées suivantes, calculer explicitement l'intégrale tronquée, étudier la convergence et le cas échéant calculer l'intégrale.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2},$ 2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}},$ 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan t \, dt,$ 4. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \, dt,$
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2},$ 6. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2},$ 7. $\int_0^1 \ln(t) \, dt,$ 8. $\int_0^1 \frac{dt}{1-t}.$

Exercice II. Pour chacune des fonctions f suivantes donner un équivalent en $+\infty$ et en déduire la convergence (ou non) de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) \, dt$.

1. $f(t) = \frac{t^2+1}{t^3+3},$ 2. $f(t) = \frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt[3]{t^4+t}},$ 3. $f(t) = \frac{e^t}{e^{2t}+t},$ 4. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\ln(1+t)}}.$
5. $f(t) = \frac{1}{t^2+\sqrt{t}},$ 6. $f(t) = \frac{1}{t+\sin t},$ 7. $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^2+1},$ 8. $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}.$

Exercice III. Etudier l'existence des intégrales suivantes

1. $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5+x^3}} \, dx,$ 2. $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} \, dx,$ 3. $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2+1} \, dx,$
4. $\int_0^1 \frac{\ln(x) \, dx}{\sqrt{(1-x)^3}},$ 5. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x) \, dx}{x^2},$ 6. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^x} \, dx.$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}},$ 8. $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{dx}{\ln x + 1},$ 9. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(1+x)}} \, dx.$
10. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}-1}{x^{5/2}} \, dx,$ 11. $\int_0^1 x^4 e^{1/x} \, dx,$ 12. $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx.$

Exercice IV. Intégrales de Bertrand. Soient deux réels a et b tels que $0 < a < 1 < b$. En fonction des réels α et β , donner la nature des intégrales de BERTRAND définies comme suit

$$I = \int_b^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}, \quad J = \int_0^a \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}.$$

Considérer les cas suivants : 1) $\alpha > 1$; 2) $\alpha = 1$ et $\beta > 1$; 3) $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$; 4) $\alpha < 1$.

Exercice V. Calculer les intégrales suivantes, après avoir vérifier s'il existent.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1} \, dx,$ 2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} \, dx, a \in \mathbb{R},$ 3. $\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} \, dx$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{1}{5\operatorname{ch}x + 3\operatorname{sh}x + 4} dx \qquad 5. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt, a \text{ et } b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$$

Exercice VI. Fonction Gamma. Soit $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente. On note $\Gamma(n)$ sa valeur.
2. Trouver une relation entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$.
3. Calculer $\Gamma(0)$ et $\Gamma(1)$.
4. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice VII. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose la fonction f bornée : il existe une constante M telle que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt$ existe pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt$.
3. Même question en supposant maintenant qu'il existe deux constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall t \geq A, \quad |f(t)| \leq e^{\alpha t}.$$

Exercice VIII. Etudier la nature des intégrales dépendant de paramètres :

1. $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt, k \in \mathbb{N},$
2. $K_\alpha = \int_0^{+\infty} t^\alpha (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}) dt, \alpha \in \mathbb{R},$
3. $J_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt, \alpha > 0,$
4. $L_{a,b} = \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b} dt, a \text{ et } b \in \mathbb{R}$

Exercice IX. Intégrales impropres.

1. Montrer que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t^\alpha} dt$ sont convergentes pour tout réel $\alpha > 1$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt$ diverge pour $0 < \alpha \leq 1$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que la limite $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ existe et est finie pour tout réel α tel que $0 < \alpha \leq 1$.
4. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt, \alpha > 0?$
5. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t} dt?$

Exercice X. (un peu plus difficile). Etudier l'existence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{\sin x - \operatorname{sh} x} dx,$ 2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^\alpha} dx, \alpha \in \mathbb{R},$ 3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}} dx,$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{4/3}} dx,$ 5. $\int_0^1 \frac{x^x - 1}{x} dx,$ 6. $\int_0^{+\infty} \ln \left[\ln \left(\frac{x^3 + x + 1}{x^3 + 1} \right) \right] dx,$
7. $\int_0^{+\infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1} \right) dx,$ 8. $\int_0^{+\infty} x^{-\ln x} dx,$ 9. $\int_0^\pi \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) dx,$
10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} dx.$ 11. $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx,$ 12. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{5/3}} dx.$