Université d'Aix-Marseille Faculté des sciences et techniques Licence de mathématiques et informatique 2e année Analyse 2 (MA301)	**Examen**	Lundi 9 janvier 2012 ☒ Saint-Jérôme ☒ Aix - Montperrin T. COULBOIS et P. SICBALDI

Ni calculatrices, ni documents. 3 heures.

Toute réponse doit être justifiée, la qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements constituent un élément important d'appréciation.

Exercice I. (Cours)

1. Énoncer et démontrer le critère de convergence des séries numériques de RIEMANN de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un nombre réel. *(Vous pourrez comparer avec des intégrales généralisées.)*

2. Donner les définitions de :

a. convergence simple ;

b. convergence uniforme ;

c. convergence normale.

Exercice II. Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\Big)\, dx$ **3.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\cos(x))\, dx$

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie, continue et localement intégrable sur $]-1;1[$. Pour $a \in]-1;1[$, $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(a)$. En faisant tendre a vers 1, nous obtenons que l'intégrale est convergente et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.
2. La fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ est définie, continue et localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Étudions la convergence en $+\infty$. Calculons : $\forall \theta \in]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$ et en passant à la bijection réciproque, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan(\frac{1}{x})$. En 0 la fonction arctan est dérivable, son développement limité est $\arctan(u) = u + o(u)$. Nous avons donc l'équivalent $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de l'infini. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge, nous concluons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\Big)\, dx$ est divergente.
3. La fonction $x \mapsto \ln(1-\cos(x))$ est définie, continue et localement intégrable sur $]0;2\pi[$. Étudions la convergence en 0 en effectuant un développement limité au voisinage de 0 : $\ln(1-\cos(x)) = \ln(1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))) = \ln(\frac{x^2}{2}+o(x^3)) \sim 2\ln(x)$. L'intégrale $\int_0^1 \ln(x)\, dx = [x\ln(x) - x]_0^1 = -1$ est convergente. Nous concluons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\cos(x))\, dx$ converge.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin x)(\ln x)\, dx$

La fonction $x \mapsto (\sin x)(\ln x)$ est définie, continue et localement intégrable sur $]0; +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\frac{\pi}{6} + 2n\pi; \frac{5\pi}{6} + 2n\pi]$, alors $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ et $(\sin x)(\ln x) \geq \frac{1}{2}\ln(2n\pi)$. En intégrant cette inégalité nous obtenons $\int_{\frac{\pi}{6}+2n\pi}^{\frac{5\pi}{6}+2n\pi} (\sin x)(\ln x)\, dx \geq \frac{\pi}{3}\ln(2n\pi)$. Cette dernière quantité est plus grande que 1 car $n \geq 1$. L'intégrale ne vérifie donc pas le critère de CAUCHY pour les intégrales généralisées convergentes. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin x)(\ln x)\, dx$ est donc divergente.

Exercice III. **1.** Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$. *(Vous pourrez décomposer la fraction en éléments simples et reconnaître une série télescopique)*

À l'infini nous avons l'équivalence $\frac{1}{n^2+5n+6} \sim \frac{1}{n^2}$. La série de RIEMANN $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ converge. Donc la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$ converge.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{n+2} + \frac{-1}{n+3}$. Nous reconnaissons une série télescopique : pour $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+5n+6} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{-1}{n+3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \cdots + \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+3}$. En faisant tendre N vers $+\infty$ nous obtenons : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{2}$.

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{(-1)^n}{n} + 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Nous reconnaisons la série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \ln 2$ qui converge. En effectuant un développement limité, nous obtenons $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^3}) \sim \frac{1}{2n^2}$. La série de RIEMANN $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ converge, donc la série $\sum 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ converge. Ainsi la série proposée converge, puisqu'elle est la somme de deux séries convergentes.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n}, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Par récurrence, nous pouvons montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2+u_n} \leq \frac{1}{2} < 1$. D'après le critère de D'ALEMBERT la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Tournez la page.

Exercice IV. Soit $\alpha > 1$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^\alpha x^2}$.

1. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction constante nulle sur $[0;1]$ si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Pour $x = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$.
Pour $x \in]0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = n^{1-\alpha}\frac{x}{\frac{1}{n^\alpha}+x^2} \rightarrow_{n\to+\infty} 0$ car $1-\alpha < 0$.
La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers la fonction constante nulle f sur $[0;1]$.
Étudions la convergence uniforme. Cherchons pour $n \in \mathbb{N}$ le maximum de la fonction f_n. Cette fonction est dérivable et pour $x \in [0;1]$, $f_n'(x) = \frac{n(1-n^\alpha x^2)}{(1+n^\alpha x^2)^2}$. La fonction dérivée s'annule donc en $x_n = \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$. La fonction f_n atteind son maximum $f_n(x_n) = \frac{n^{1-\frac{\alpha}{2}}}{2}$ en x_n.
Nous obtenons que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = 0 \iff \alpha > 2$.
La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$ si, et seulement si, $\alpha > 2$.

2. Pour $\alpha = 3$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = 0$.

D'après la question précédente, pour $\alpha = 3$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers la fonction nulle. De plus les fonctions f_n sont continues donc intégrables. Nous pouvons inverser la limite et l'intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0.$$

3. Pour $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$.

Pour $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}$, calculons : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nx}{1+n^\alpha x^2}\,dt = [n\frac{\ln(1+n^\alpha x^2)}{2n^\alpha}]_0^1 = n\frac{\ln(1+n^\alpha)}{2n^\alpha}$.

4. Montrer que pour tout $\beta > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\beta} = 0$.

Soit $\beta > 0$, pour tout $x > 0$, $\frac{\ln(1+x)}{x^\beta} = \frac{1}{\beta}\frac{\ln((1+x)^\beta)}{(1+x)^\beta}\frac{(1+x)^\beta}{x^\beta}$. En changeant de variable $X = (1+x)^\beta$ nous obtenons la limite du premier facteur : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln((1+x)^\beta)}{(1+x)^\beta} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X} = 0$. En factorisant par x^β, le deuxième facteur converge vers 1. Nous avons donc montré que pour tout $\beta > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\beta} = 0$.

5. En déduire que pour tout $\alpha > 1$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = 0$.

En posant $x = n^\alpha$ et $\beta = 1 - \frac{1}{\alpha}$, nous pouvons écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\alpha > 1$, $u_n = \frac{1}{2}\frac{\ln(1+X)}{X^\beta}$ avec $\beta > 0$, la question précédente nous permet donc que conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

6. Étudier les convergences simple et normale de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ selon les valeurs de α.

Si $x = 0$ alors pour tout entier n, $f_n(0) = 0$ et la série numérique $\sum f_n(0)$ converge.
Pour $x \neq 0$, quand n tend vers $+\infty$, nous avons l'équivalent $f_n(x) \sim \frac{1}{x}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Nous reconnaissons une série de RIEMANN et la série numérique $\sum f_n(x)$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.
Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;1]$ si, et seulement si, $\alpha > 2$.
D'après les calculs faits précédemment pour $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\| = f_n(x_n) = \frac{n^{1-\frac{\alpha}{2}}}{2}$. La série numérique $\sum \|f_n\|$ est donc une série de RIEMANN qui converge si, et seulement si, $\alpha > 4$.
Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0;1]$ si, et seulement si, $\alpha > 4$.