Université d'Aix-Marseille Faculté des sciences et techniques Licence de mathématiques et informatique 2e année Analyse 2 (MA301)	**Examen**	Lundi 9 janvier 2012 ☒ Saint-Jérôme ☒ Aix - Montperrin T. COULBOIS et P. SICBALDI

Ni calculatrices, ni documents. 3 heures.

Toute réponse doit être justifiée, la qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements constituent un élément important d'appréciation.

Exercice I. (Cours)

1. Énoncer et démontrer le critère de convergence des séries numériques de RIEMANN de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un nombre réel. *(Vous pourrez comparer avec des intégrales généralisées.)*

2. Donner les définitions de :

a. convergence simple ;

b. convergence uniforme ;

c. convergence normale.

Exercice II. Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) dx$ **3.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\cos(x))\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin x)(\ln x)\, dx$

Exercice III. 1. Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$. *(Vous pourrez décomposer la fraction en éléments simples et reconnaître une série télescopique)*

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{(-1)^n}{n} + 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n}, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Tournez la page.

Exercice IV. Soit $\alpha > 1$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^\alpha x^2}$.

1. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction constante nulle sur $[0;1]$ si, et seulement si, $\alpha > 2$.

2. Pour $\alpha = 3$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = 0$.

3. Pour $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$.

4. Montrer que pour tout $\beta > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\beta} = 0$.

5. En déduire que pour tout $\alpha > 1$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = 0$.

6. Étudier les convergences simple et normale de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ selon les valeurs de α.