TD2 - Séries

Exercice I. Calculer les sommes partielles et préciser la nature des séries

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(3+\frac{1}{3^n}\right)$, **2.** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)$, **3.** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2^n}{n!}$.

Exercice II. Étudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, **2.** $u_n=e^{-\sqrt{n}}$, **3.** $u_n=\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$,

4. $u_n=n\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right)$, **5.** $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$, **6.** $u_n=\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$,

7. $u_n=\dfrac{1}{\ln n\,\ln(\mathrm{ch} n)}$, **8.** $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, **9.** $u_n=\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$,

10. $u_n=\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{\sqrt{n}}{n^2-n}$, **11.** $u_n=n^{-1-\frac{1}{n}}$, **12.** $u_n=\displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{t^4+1}}dt$,

13. $u_n=\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$, **14.** $u_n=\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{n^2+1}{n}\right)$, **15.** $u_n=\sqrt[n]{n}-1$,

16. $u_n=\dfrac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$, **17.** $u_n=\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}}$, **18.** $u_n=\arccos\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n^2}}$.

Exercice III. Calculer les sommes des séries suivantes, après avoir vérifié si elles sont convergentes.

1. $u_n=\dfrac{9}{(3n+1)(3n+4)}$, **2.** $u_n=\dfrac{n}{n^4+n^2+1}$, **3.** $u_n=\dfrac{2n-1}{n^3-4n}$, $n\geq 3$.

Exercice IV. On considère $c_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

1. Soit $a_n=\frac{1}{c_n}$. Montrer que a_n est une série téléscopique.

2. Évaluer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

3. On considère maintenant $a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Montrer que a_n est une série téléscopique et en déduire le terme général de la suite des sommes partielles de a_n.

Exercice V. Étude de la série harmonique.

On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. On note S_N la N^e somme partielle de cette série et on pose

$$T_N = S_N - \ln(N+1).$$

1. Montrer que

$$\forall\ x > 0, \quad \ln(1+x) - \ln x \leq \frac{1}{x}.$$

2. En déduire que la suite $(T_N)_{N\geq 1}$ est croissante.

3. Que vaut T_1 ? En déduire $\forall\ N \geq 1, \quad S_N \geq \ln(N+1)$.

4. En déduire $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est-elle convergente ?

5. Soit pour $N > 1$, $U_N = T_N - T_{N-1}$. Donner un équivalent de U_N quand N tend vers $+\infty$.

6. En déduire que la série $\sum U_N$ converge et donc que la suite (T_N) converge.

*La limite de la suite $\{T_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ est la constante d'*EULER *γ et on a la suivante relation pour la série harmonique :*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \epsilon(N) \ \textit{où} \ \lim_{N\to+\infty} \epsilon(N) = 0.$$

Exercice VI. Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2}$.

1. Montrer que la limite ci-dessus est finie.

2. Montrer que pour $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

4. Trouver des relations similaires à celle de la série harmonique (donnée dans l'exercice précedent) pour les séries $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$.

5. En déduire la valeur de la limite cherchée.

Exercice VII. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$, **2.** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \ln n}$, **3.** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$,

4. $u_n = (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \dfrac{n}{2^n}$. **5.** $u_n = \dfrac{n+3}{(-1)^n\sqrt{n} - 3n}$, **6.** $u_n = \dfrac{1+(-1)^n n}{n^2}$,

7. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n+\cos(n)}$, **8.** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$, **9.** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$.

10. $u_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$, **11.** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n + \sin \frac{2n\pi}{3}}$, **12.** $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$,

13. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, **14.** $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+3}$, **15.** $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice VIII. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux, dépendant de paramètres, sont les suivants.

1. $u_n = \dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, **2.** $u_n = \dfrac{\cos(n\alpha)}{\sqrt{n}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, **3.** $u_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$, $a > 0$,

4. $u_n = e^{an^2}\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^{n^3}$, $a \in \mathbb{R}$, **5.** $u_n = \sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+\alpha\, n}$, $\alpha \leq 2$

6. $u_n = \dfrac{n^n\alpha^n}{n!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, **7.** $u_n = n^\alpha \left[(n+1)^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n-1}{n}}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice IX. Discuter la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{25n}$, pour $n \geq 1$ et estimer sa somme sans dépasser l'erreur tolérée de 10^{-2}.

Exercice X. Montrer que les séries de termes généraux positifs a_n et $\dfrac{a_n}{1+a_n}$ sont de même nature.

Exercice XI. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels.

1. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge vers S, alors $\sum_{n\geq 0}(a_n + a_{n+1})$ converge et calculer sa somme.

2. Supposons que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\sum_{n\geq 0}(a_n + a_{n+1})$ converge vers T, alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et calculer sa somme.

3. Donner un exemple où au contraire, $\sum_{n\geq 0}(a_n + a_{n+1})$ converge et $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge.