

Exercice I. Théorème de DARBOUX

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée. Soit $a, b \in I$. On suppose pour simplifier que $a < b$ et que $f'(a) < f'(b)$. Soit $\xi \in [f'(a); f'(b)]$. On se propose de montrer que la valeur intermédiaire ξ est atteinte par la dérivée f' .

1. Montrer que $\xi \in [f'(a); \frac{f(b)-f(a)}{b-a}] \cup [\frac{f(b)-f(a)}{b-a}; f'(b)]$. On suppose désormais pour simplifier que $f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et que $\xi \in]f'(a); \frac{f(b)-f(a)}{b-a}]$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est continue sur $]a; b]$. En déduire qu'il existe $c \in]a; b]$ tel que $\xi = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.
3. Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.
4. Conclure que la fonction f' a la propriété des valeurs intermédiaires.

Exercice II. Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Pour $\epsilon > 0$ et $x_0 > 0$ trouver $\eta = \eta(\epsilon, x_0) > 0$ tel que $\forall x \in]0; +\infty[$, si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
2. Pour tout $\eta > 0$ trouver $x, x' \in]0; +\infty[$ tels que $|x - x'| < \eta$ et $|f(x) - f(x')| \geq 1$.
3. En déduire que f n'est pas uniformément continue sur $]0; +\infty[$.

Exercice III. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I dont la dérivée est bornée. Montrer que f est uniformément continue sur I .

Exercice IV. Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Rappeler que la dérivée de f n'est pas bornée sur $]0; +\infty[$.
2. Pour $\epsilon > 0$ trouver $\eta = \eta(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$|x| \leq \eta \Rightarrow |f(x)| \leq \epsilon.$$

3. Montrer (en utilisant l'exercice précédent) que pour tout $a > 0$, f est uniformément continue sur $[a; +\infty[$.
4. Montrer que f est uniformément continue sur $[0; +\infty[$.

Exercice V. Pour chacune des affirmations suivantes déterminez si elles sont vraies ou fausses. Justifiez votre choix.

1. $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x' \in [0; 3], |x - x'| < \eta \Rightarrow |[x] - [x']| < \epsilon$.
2. $\forall \epsilon > 0, \forall x \in [0; 1[, \exists \eta > 0, \forall x' \in [0; 3], |x - x'| < \eta \Rightarrow |[x] - [x']| < \epsilon$.
3. $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x' \in [0; 10], |x - x'| < \eta \Rightarrow |x^2 - x'^2| < \epsilon$.
4. $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x' \in [0; +\infty[, |x - x'| < \eta \Rightarrow |x^2 - x'^2| < \epsilon$.
5. $\forall \epsilon > 0, \forall x > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in]-\eta; \eta[, |\frac{xy}{x^2+y^2}| \leq \epsilon$.
6. $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in]-\eta; \eta[, |\frac{xy}{x^2+y^2}| \leq \epsilon$.

Consultez régulièrement la page <http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2012/integration/>