Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2 (SMI3U2)

Examen
Mardi 8 janvier 2013

☒ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Deux heures, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : T. Coulbois, F. Palesi, H. Short

Exercice I. **(Cours, 6 points)**

(1) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède un vecteur propre non nul.

(2) Énoncer le théoréme de Cayley-Hamilton.

(3) Soit f un endomorphisme de E et P un polynôme. Montrer que si λ est une valeur propre de f et $P(f) = 0$, alors $P(\lambda) = 0$

Exercice II. On travaille dans un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit $m \in \mathbb{R}$.
Soit $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & m \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A_m.

Notons $\chi_m(X)$ le polynôme caractéristique de A_m, alors

$$\begin{aligned} \chi_m(X) &= \det(A_m - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 2 & m-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & m-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(m-X). \end{aligned}$$

2. Soit $Q(X) = X^3 - (m+2)X^2 + (2m+1)X$. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que $Q(A_m) = mI_3$.

D'après la question précédente

$$\begin{aligned} \chi_m(X) &= (1-X)^2(m-X) = (1-2X+X^2)(m-X) \\ &= m - (2m+1)X + (m+2)X^2 - X^3 = m - Q(X) \end{aligned}$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_m(A_m) = 0 = mI_3 - Q(A_m)$. Nous en déduisons : $Q(A_m) = mI_3$.

3. Pour $m \neq 0$, déduire ${A_m}^{-1}$ de la question précédente.

De la question précédente nous déduisons que

$$\frac{1}{m}Q(A_m) = \frac{1}{m}({A_m}^2 - (m+2)A_m + (2m+1)I_3)A_m = I_3$$

et donc que

$$\begin{aligned}
{A_m}^{-1} &= \frac{1}{m}\left({A_m}^2 - (m+2)A_m + (2m+1)I_3\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\begin{pmatrix}1 & 4 & m+1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2m+2 & m^2\end{pmatrix} - (m+2)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & m\end{pmatrix} + (2m+1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{m}\begin{pmatrix}m & 2-m & -1\\ 0 & m & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. Pour $m = 3$, montrer que la matrice A_3 est diagonalisable et donner une matrice de passage P_3 telle que $P_3^{-1}A_3P_3$ est diagonale.

Les valeurs propres de A_3 sont 1 de multiplicité algébrique 2 et 3 de multiplicité algébrique 1. Calculons les sous-espaces propres :

E_1 : $\left\{\begin{array}{rcl} y+z &=& 0\\ 2y+2z &=& 0\end{array}\right. \iff y+z=0$. Le sous-espace propre E_1 est de dimension 2 : avec $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $u_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, (e_1, u_1) est une base de E_1.

Nous en déduisons que A_1 est diagonalisable.

E_3 : $\left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+z &=& 0\\ -2y &=& 0\\ 2y &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& 0\\ z &=& 2x\end{array}\right.$. Le sous-espace propre E_3 est de dimension 1 : $u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_3 associé à la valeur propre 3.

Avec $P_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$, nous obtenons $P_3^{-1}A_3P_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

5. Pour $m = 1$, montrer que la matrice A_1 n'est pas diagonalisable et donner une matrice de passage P_1 telle que $P_1^{-1}A_1P_1$ est triangulaire.

La matrice A_1 a pour seule valeur propre 1. Si elle était diagonalisable, elle serait semblable et donc égale à la matrice identité I_3, ce qui n'est pas le cas.
Déterminons le sous-espace propre E_1 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y+z &=& 0 \\ 2y &=& 0 \end{array}\right. \iff y=z=0.$$

Le sous-espace propre E_1 est de dimension 1. Le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_1 associé à la valeur propre 1.
Cherchons une forme linéaire propre pour ${}^tA_1$:

$$\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix} A_1 = \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+2c &=& 0 \\ a &=& 0 \end{array}\right. \iff a=c=0.$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $f(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = y$. Alors $\mathrm{Ker} f =< e_1, e_3 >$ est un sous-espace stable par A. Nous complétons (e_1, e_3) par le vecteur e_2 pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $P_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) vers la base (e_1, e_3, e_1), alors

$$P_1^{-1} A_1 P_1 = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

6. Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, montrer que A_m n'est pas diagonalisable (on ne demande pas de la trigonaliser).

Pour $m \neq 1$, A_m possède deux valeurs propres : 1 de multiplicité algébrique 2 et m de multiplicité algébrique 1. Pour que A_m soit diagonalisable il faut et il suffit que 1 soit de multiplicité géométrique 2 (en effet m est de multiplicité géométrique plus grande que 1 et plus petite que la multiplicité algébrique donc $\dim(E_m) = 1$).
Cherchons le sous-espace propre E_1 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y+z &=& 0 \\ 2y+(m-1)z &=& 0 \end{array}\right. \iff y=z=0.$$

(car le déterminant de ce système de deux équations à deux inconnues est $(m-1)-2 = m-3 \neq 0$ si $m \neq 3$).
Nous en déduisons que la dimension du sous-espace propre E_1 est $1 < 2$ et que la matrice A_m n'est pas diagonalisable dans ce cas.

Exercice III. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et soient $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ trois réels distincts. On définit l'application ϕ_i par $\phi_i(P) = P(x_i)$ pour tout polynôme $P \in E$.

1. Montrer que ϕ_i est une forme linéaire sur E.

Soit P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et α, β deux réels. Alors pour $i = 1, 2$ ou 3, $\phi_i(\alpha P + \beta Q) = (\alpha P + \beta Q)(x_i) = \alpha P(x_i) + \beta Q(x_i) = \alpha\phi_i(P) + \beta\phi_i(Q)$. Cela montre que ϕ_i est une application linéaire définie sur E, comme elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est une forme linéaire.

2. Montrer que la famille (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de E^*.

Montrons que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une famille libre. Dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de E la matrice de la forme linéaire ϕ_i est $[\phi_i]_{\mathcal{B}} = (1\ x_i\ {x_i}^2)$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 \end{pmatrix}$ est une matrice de Vandermonde de déterminant $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) \neq 0$ (car x_1, x_2 et x_3 sont distincts). Les formes linéaires (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) forment donc une famille libre. Comme la dimension de l'espace dual E^* est égale à la dimension de E c'est-à-dire 3, nous en déduisons que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de E^*.

3. Soit (L_1, L_2, L_3) la base antéduale de (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3). Exprimer $L_i(x_j)$.

Par définition de la base antéduale :

$$\forall i, j, \phi_i(L_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par définition des formes linéaires ϕ_i, nous obtenons que les polynômes L_1, L_2 et L_3 vérifient :

$$\forall i, j, L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

4. En déduire que $L_1(X) = C_1(X - x_2)(X - x_3)$ pour une constante C_1 que l'on déterminera en fonction de x_1, x_2, x_3.

D'après la question précédente $L_1(x_2) = L_1(x_3) = 0$. L_1 est un polynôme de degré inférieur ou égal à deux qui a deux racines distinctes x_2 et x_3, il s'écrit donc sous la forme $L_1(X) = C_1(X - x_2)(X - x_3)$.
Pour calculer C_1, nous utilisons toujours la question précédente : $L_1(x_1) = 1$ ce qui nous donne :

$$1 = L_1(x_1) = C_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$$

et comme les x_i sont deux à deux distincts

$$C_1 = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}.$$

5. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout polynôme P on a :

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \alpha_1 P(x_1) + \alpha_2 P(x_2) + \alpha_3 P(x_3)$$

Comme l'intégrale est linéaire, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \psi(P) = \int_0^1 P(t)\,dt \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. D'après la question 2), cette forme linéaire ψ, a des coordonnées dans la base (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) : il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\psi = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \alpha_3\phi_3$. Ce que nous pouvons écrire en reprenant la définition de ψ et des ϕ_i :

$$\int_0^1 P(t)dt = \alpha_1 P(x_1) + \alpha_2 P(x_2) + \alpha_3 P(x_3).$$

6. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on a

$$P = P(x_1)L_1 + P(x_2)L_2 + P(x_3)L_3$$

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors d'après la question 3), $L_1(x_1) = 1$, $L_2(x_1) = 0$ et $L_3(x_1) = 0$. Ainsi $P(x_1) = P(x_1)L_1(x_1) + P(x_2)L_2(x_1) + P(x_3)L_3(x_1)$. De même nous obtenons :

$$P(x_2) = P(x_1)L_1(x_2) + P(x_2)L_2(x_2) + P(x_3)L_3(x_2)$$

et

$$P(x_1) = P(x_1)L_1(x_2) + P(x_2)L_2(x_2) + P(x_3)L_3(x_2)$$

Soit Q le polynôme $Q = P(x_1)L_1 + P(x_2)L_2 + P(x_3)L_3$. Nous venons de démontrer que les polynômes P et Q coïncident aux points x_1, x_2 et x_3. Or ce sont deux polynômes de degrés inférieur ou égal à deux, ils sont donc égaux.