

## 1. CHANGEMENT DE BASES

**Exercice 1.** Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .

- (1) Dans  $\mathbb{R}^3$ , avec  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  avec

$$\vec{u} = (1, 1, 1); \quad \vec{v} = (1, -1, 0) \quad \vec{w} = (1, 1, -2)$$

- (2) Dans  $\mathbb{R}_2[X]$ , avec  $\mathcal{B}$  la base canonique et  $\mathcal{B}' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$ .

- (3) Dans  $\mathbb{R}_2[X]$ , avec  $\mathcal{B} = (1, X - 2, X^2 - 3X + 3)$  et  $\mathcal{B}'$  la base canonique.

- (4) Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , avec

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

**Exercice 2.** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice relativement à la base canonique est  $A := \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$

- (1) Montrer que la famille  $\mathcal{B}' = \{b_1, b_2, b_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , où

$$b_1 = (2, 4, -5); \quad b_2 = (1, 0, 1); \quad b_3 = (0, 1, -2)$$

- (2) Calculer  $f(b_1)$ ,  $f(b_2)$  et  $f(b_3)$  et les exprimer en fonction de  $b_1, b_2$  et  $b_3$ .

- (3) En déduire la matrice  $A'$  de  $f$  relativement à  $\mathcal{B}'$ .

- (4) Calculer  $A'^2$  et en déduire  $f^2$ .

**Exercice 3.** On se place dans l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On considère  $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$  où

$$f_1 : x \mapsto e^{-x} \quad f_2 : x \mapsto (x - 1)e^{-x} \quad f_3 : x \mapsto (x^2 + 1)e^{-x}$$

- (1) Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $E$ .

- (2) On considère l'application  $\Phi$  qui associe à une fonction  $f \in E$ , la fonction  $\Phi(f) = f'$ . Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E$ .

- (3) Ecrire la matrice  $A$  de  $\Phi$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

- (4) (Optionel) Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . (Indication : on pourra écrire  $A = -I_3 + N$ )

**Exercice 4.**

Soient  $P_1 = X^2 - 1$ ,  $P_2 = X(X - 1)$  et  $P_3 = X(X + 1)$

- (1) Montrer que  $\mathcal{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$  forme une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

- (2) Ecrire la matrice  $P$  de changement de base de la base canonique vers  $\mathcal{B}'$ .

- (3) Calculer  $P^{-1}$ .

- (4) Soit l'application linéaire  $\phi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  définie par  $\phi(P) = P(0)X^2 + P(1)X + P(2)$ . Ecrire la matrice de  $\phi$  dans la base canonique

- (5) Ecrire la matrice de  $\phi$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

## 2. ELEMENTS PROPRES

**Exercice 5.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f : E \rightarrow F$

- (1)  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\lambda^k$  est valeur propre de  $f^k$ .
- (2) Si de plus  $f$  est inversible, montrer que  $\lambda^k$  est valeur propre de  $f^k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 6.** On considère l'application  $\Phi : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$  définie par

$$\Phi(P) = P(X + 1) - P'. \quad (\text{Attention aux notations } P(X + 1) \neq P \times (X + 1))$$

- (1) En considérant le terme de plus haut degré de  $\Phi(P)$ , montrer que la seule valeur propre de  $\Phi$  est 1.
- (2) En considérant les trois termes de plus haut degré de  $\Phi(P)$ , montrer qu'un vecteur propre ne peut pas être de degré supérieur ou égal à 2.
- (3) En déduire les éléments propres de  $\Phi$ .

**Exercice 7.**

- (1) Soit l'application linéaire  $\phi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  définie par  $\phi(P) = XP'$ . Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\phi$ .
- (2) Plus généralement, si  $a \in \mathbb{R}$ , chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\phi_a$  définie par  $\phi_a(P) = (X - a)P'$ .

**Exercice 8.** On considère l'application  $\theta : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$  défini par  $\theta(P) = P(2 - X)$

- (1) Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $\theta$ , alors  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = -1$ .
- (2) Montrer que les éléments de la forme  $(X - 1)^{2k}$  avec  $k \in \mathbb{N}$  sont des vecteurs propres pour la valeur propre 1.
- (3) Montrer que les éléments de la forme  $(X^2 - 1)^{2j+1}$  avec  $j \in \mathbb{N}$  sont des vecteurs propres pour la valeur propre  $-1$ .
- (4) En déduire la forme de tous les éléments propre de  $\theta$

**Exercice 9.**

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que:

- $a_{ij} > 0$  pour tout  $1 \leq i, j \leq n$
- $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

- (1) Montrer que 1 est valeur propre de  $A$ .
- (2) Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ , alors  $|\lambda| \leq 1$ .

**Exercice 10.** Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Montrer que  $\chi_M(X) = X^2 - \text{tr}(M)X + \det(M)I_2$ .

**Exercice 11.** Soit  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice. Déterminer géométriquement les vecteurs propres et les valeurs propres de  $S$ . En déduire la trace et le déterminant de  $S$ .

**Exercice 12.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et  $M = \begin{bmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ . On veut déterminer le polynôme caractéristique de  $M$  en fonction de celui de  $A$ .

- (1) Soit  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Diagonaliser  $B$ .

- (2) Montrer que  $M$  est semblable à la matrice  $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3A \end{bmatrix}$ .  
 (3) Calculer  $\chi_M$  en fonction de  $\chi_A$ .
- 

### 3. DIAGONALISATION

**Exercice 13.** Soient  $a, b, \theta \in \mathbb{R}$ . On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Donner les valeurs propres des matrices dans  $\mathbb{R}$  et dans  $\mathbb{C}$ . Ces matrices sont-elles diagonalisables dans  $\mathbb{R}$ ? dans  $\mathbb{C}$ ?

**Exercice 14.** On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables? Si oui, les réduire.

**Exercice 15.** On considère la matrice  $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$  de  $M_n(\mathbb{C})$ .

- (1) Sans calculer le polynôme caractéristique de  $A_t$ , montrer que  $(t - 1)$  est valeur propre.
- (2) Déterminer le sous-espace propre associé.
- (3) Que dire de la multiplicité de la valeur propre  $(t - 1)$ ?
- (4) En déduire le spectre de  $A_t$ .
- (5)  $A_t$  est-elle diagonalisable?

**Exercice 16.** Soit  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  l'application qui à  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  associe le polynôme  $Q = f(P)$ , où  $Q$  est la dérivée seconde du polynôme  $(X^2 - X)P$ .

- (1) Montrer que  $f$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  et déterminer la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique.
- (2) Déterminer le spectre de  $f$ . En déduire que  $f$  est un automorphisme.
- (3) Montrer que  $f$  est diagonalisable et déterminer les sous-espaces propres de  $f$ .
- (4) Diagonaliser  $A$ .

**Exercice 17** (La suite de Fibonacci).

On définit la suite  $(u_n)$  par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- (1) Montrer qu'il existe une matrice  $F \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = F \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$
- (2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $F$ .
- (3) Mettre  $F$  sous la forme  $F = P^{-1}DP$  avec  $D$  diagonale.
- (4) Calculer  $F^n$ .
- (5) En déduire le terme général de la suite  $u_n$ .

**Exercice 18.** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 2i+2 & 2i+4 & -i-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2i+4 & 4i+8 & -i-4 \end{bmatrix}.$$

- (1) Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$ .
- (2) Montrer qu'il existe trois endomorphismes  $g, h, l$  de  $\mathbb{C}^3$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n = g + i^n h + (-2)^n l$ .
- (3) Quelles sont les matrices de  $g, h$  et  $l$  dans la base canonique?

**Exercice 19.** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  telle que  $\text{tr}(A) \neq 0$  et

$$f : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K), M \mapsto \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A.$$

- (1) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(K)$ .
- (2) Montrer que  $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(K) : \text{tr}(M) = 0\}$  et  $\text{Vect}(A)$  sont des sous-espaces propres de  $f$ .
- (3) En déduire que  $f$  est diagonalisable et donner la matrice de  $f$  dans une base formée de vecteurs propres.

**Exercice 20.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $f^k = 0$ .

- (1) Déterminer le spectre de  $f$ . En déduire que si  $f \neq 0$ , alors  $f$  n'est pas diagonalisable.
- (2) On suppose  $f \neq 0$ . Soit  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 1$ , tel que  $f^r = 0$  et  $f^{r-1} \neq 0$ . Montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que  $f^{r-1}(x) \neq 0$ .
- (3) Montrer que la famille  $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$  est libre.
- (4) Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ . Montrer que  $F$  est stable par  $f$ .
- (5) Soit  $u$  l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $F$ . Donner la matrice de  $u$  dans la base  $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ .

**Exercice 21.** Soit  $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ .

- (1) Calculer  $M^2$ . En déduire un polynôme annulateur de  $M$ .
- (2)  $M$  est-elle diagonalisable?
- (3) Diagonaliser  $M$ .