Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Master de mathématiques, 1re année

Deuxième TP

lundi 18 novembre 2013
T. Coulbois

Documentation :
http://www.sagemath.org/help.html
http://www.sagemath.org/fr/html/a_tour_of_sage/
http://www.sagemath.org/fr/html/tutorial/
http://sagebook.gforge.inria.fr/
http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2014/sage-m1

1 Rappels de la première séance

1.1 Nombres

Les nombres de sage appartiennent à différentes classes, il y a des mécanismes très subtils de **conversion**. Utilisez `type()` pour découvrir la classe d'un objet, `numerical_approx()` pour obtenir un réel avec une précision arbitraire. On peut forcer les conversions en déclarant l'ensemble de nombres : `ZZ,RR,QQ`, etc.

```
sage: RR(3)
3.00000000000000
sage: pi
pi
sage: pi.numerical_approx(digits=50)
3.1415926535897932384626433832795028841971693993751
sage: x=3/7;x
3/7
sage: x.numerical_approx(digits=50)
0.42857142857142857142857142857142857142857142857143
sage: RR(3/7)
0.428571428571429
```

1.2 Calcul formel

Les **variables du calcul formel** doivent être déclarées. Sage est très fort en calcul formel.

```
sage: k,n=var('k','n')
sage: sum(k^2,k,1,8)
204
sage: s=sum(k^2,k,1,n);s
1/3*n^3 + 1/2*n^2 + 1/6*n
sage: s.factor()
1/6*(n + 1)*(2*n + 1)*n
sage: s=sum(1/k^2,k,1,oo)
1/6*pi^2
sage: p=(1+x)^7;p
(x + 1)^7
sage: p.expand()
x^7 + 7*x^6 + 21*x^5 + 35*x^4 + 35*x^3 + 21*x^2 + 7*x + 1
sage: p(x=1)
128
```

2 Un tout petit peu de programmation objet

1. Construire une classe `EntierGauss()` pour l'anneau des entiers de Gauss : $\mathbb{Z}[i]$.
2. Cette classe pourra définir `EntierGauss((1,2))` pour $1 + 2i$, être capable de calculer la norme, d'additionner, soustraire, multiplier, diviser (quand c'est possible).
3. Rappeler qu'il existe une division euclidienne dans $\mathbb{Z}[i]$. La programmer.
4. Énumérer les entiers de `Gauss` par norme croissante.
5. Donner la liste des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$. Écrire des méthodes `divides(), is_prime()`.
6. Écrire une méthode `factor()`.
7. Connaissez-vous une extension quadratique de $\mathbb{Q}$ dont l'anneau des entiers n'est pas principal ?

3 Un peu de théorie de Galois

Considérons le polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.
8. Avec `solve()` vérifier que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Vérifier que Sage connait les formules de Cardan. Rappeler ces formules.
9. Définir le corps $L = \mathbb{Q}[X]/P$ avec `NumberField(P)`. Vérfier que L est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ et donner son groupe de Galois.
10. Donner le groupe de Galois du corps de décomposition de $Q(x) = x^3 - x + 1$.