Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Master de mathématiques, 1re année

Troisième TP

vendredi 22 novembre 2013
T. Coulbois

Sage une grosse calculatrice

0.1 Un peu d'analyse

Calculer en utilisant `limit(ln(x)/x,x=oo)` :

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+x+5}-5}{\sqrt{x+5}-3},\quad \lim_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan(x))x,\quad \lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)}$$

En utilisant `(sin(x)).series(x==0,6)` calculer les développements limités en 0 de

$$\ln(\cos(x)) \text{ à l'ordre6},\quad (1+x)^{\frac{1}{1+x}} \text{ à l'ordre 3},\quad \sin(\tan x)-\tan(\sin x) \text{ à l'ordre 15}$$

Avec `diff(sin(xy),x,2)`, calculer le laplacien de $\ln(x^2+y^2)$

À un point de longitude λ et de lattitude ϕ la projection de Mercator fait correspondre le point du plan de coordonnées

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2})) \end{cases}$$

Montrer qu'en tout point l'échelle verticale est égale à l'échelle horizontale.

0.2 Quelques matrices

Avec `matrix(), eigenvectors_right()` et `jordan_form()`, diagonaliser ou trigonaliser les matrices

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 18 \\ -8 & -3 & -15 \\ -5 & -1 & -11 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -5 & 12 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -8 & 12 & 7 \end{pmatrix} C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -7 & -4 \\ -4 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

0.3 Un peu de théorie de Galois

Considérons le polynôme $P(x)=x^3-6x^2+9x-1$.

1. Avec `solve()` vérifier que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Vérifier que Sage connait les formules de Cardan. Rappeler ces formules.

2. Définir le corps $L=\mathbb{Q}[X]/P$ avec `NumberField(P)`. Vérfier que L est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ et donner son groupe de Galois.

3. Donner le groupe de Galois du corps de décomposition de $Q(x)=x^3-x+1$.