

Représentation des nombres

1 Codage des réels

1.1 Avec quel précision est codé un nombre réel dans Sage ?

```
sage: x=1.0
sage: x.parent()
sage: x.precision()
sage: y=1.0e-20
sage: x+y==x
```

1. Qu'est-ce que le signe, la mantisse et l'exposant d'un nombre réel ? (*Vous pouvez demander à Wikipedia*)
2. Comment un nombre réel est-il codé en binaire sur 64 bits ?

3. Quel est l'ensemble des nombres réels qui peuvent être codés comme flottants à double précision ?

1.2 Travailler avec des nombres à précision donnée

```
sage: x=sqrt(3)
sage: x.numerical_approx(100)
sage: R100=RealField(prec=100)
sage: y=R100(x)
sage: x+1/3
sage: y+1/3
```

4. Donner les 20 premières décimales de $\sqrt{2}$ et π

1.3 Recherche par dichotomie

Si f est une fonction, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, l'algorithme de recherche de solutions de $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a; b]$ par dichotomie est décrit ci-contre.

Écrire une fonction sage (recursive) qui cherche une solution par dichotomie.

```
tant que b-a>precision:
    x=(a+b)/2
    si f(x)>0:
        b=x
    sinon:
        a=x
```

```
sage: var('x')
sage: p=x^5-10x+11
sage: plot(p,x,xmin=-1,xmax=1)
```

5. Tracer la courbe représentative de $p(x) = x^5 - 10x + 11$ et localiser (c'est-à-dire donner un intervalle qui la contient) la solution réelle de $p(x) = 0$.

6. Donner par dichotomie et avec 20 décimales la solution réelle de $x^5 - 10x + 11 = 0$.

2 Nombres rationnels

2.1 Période

$13/7 = 1.85714285714285714285714285714 \dots$ On dit que le développement décimal de $13/7$ est périodique de période 6.

7. Donner la période des développements décimaux de $14/11$ et $18/37$.
8. Quelles sont les périodes possibles pour un nombre de la forme $a/7$, $a/11$, $a/21$?
9. Soit x un nombre périodique de période ℓ . Montrer que $(10^\ell - 1)x$ est un nombre décimal et donc que x est rationnel.
10. Pour $p \neq 2, 5$ un nombre premier et a un nombre premier avec p , montrer que la période de a/p est l'ordre de 10 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
11. Calculer l'ordre de 10 dans $\mathbb{Z}/373\mathbb{Z}$.

2.2 Addition des cancrs

Pour $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux nombres rationnels réduits, on note $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, c'est l'addition des cancrs.

Pour un réel x dans un intervalle à bornes rationnelles $[\frac{a}{b}; \frac{c}{d}]$, on compare x à $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$ et on garde celui des deux intervalles $[\frac{a}{b}; \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}]$ et $[\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}; \frac{c}{d}]$ qui contient x . On répète l'opération jusqu'à atteindre la précision désirée.

12. Donner un nombre rationnel approximant $\sqrt{2}$ avec une précision de 10^{-6} .
13. Donner les approximations successives de π par des nombres rationnels jusqu'à 10^{-6} .

2.3 Fractions continues

Pour une suite $a_0, a_1, \dots$ d'entiers, avec $a_0 \geq 0$ et $\forall i > 0, a_i > 0$, on définit les fractions continues

$$x_n = [a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + a_n}}} \quad \text{et} \quad x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Par exemple $\frac{57}{17} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$.

14. Tracer (avec `plot()`) la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ sur $]0; 1]$.

Pour un nombre x_0 son développement en fraction continue est donné par $a_n = \lfloor x_n \rfloor$, $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}$.

15. Donner le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$. Donner les 10 premiers termes du développement en fraction continue de π .

16. Soit x le nombre dont le développement en fraction continue est ultimement périodique : $[0, 2, 3, 7, 1, 5, 4, 1, 7, 1, 5, 4, 1, 7, 1, 5, 4, 1, 7, \dots]$. Donner une équation polynômiale dont x est racine.

3 Pour aller plus loin

3.1 Approximation d'un réel par un rationnel

Une approximation d'un nombre x par un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ est bonne si le dénominateur q n'est pas trop grand quand la précision $\epsilon = |x - \frac{p}{q}|$ est petite.

Avec l'addition des cancreaux ou avec le développement en fraction continue on obtient les meilleurs approximations d'un nombre x . La qualité de ces approximations dépend du nombre x .

17. Pour le nombre d'or $x = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et pour $x = \pi$ donner des majorants pour

$$\mu(x) = \inf\{q^2\epsilon \mid \epsilon = |x - \frac{p}{q}|, p, q \in \mathbb{Z}\}$$

18. Vérifier expérimentalement le théorème de LIOUVILLE : pour un nombre algébrique x de degré d , il existe une constante $C = C(x)$ telle que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, $|x - \frac{p}{q}| > \frac{C}{q^d}$

3.2 Groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ est constitué des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

19. Pour p premier quel est l'ordre de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times$?

20. Donner un générateur de $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/103\mathbb{Z}$.

21. Pour m et n premiers entre eux utiliser le théorème des restes chinois pour montrer que $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}^\times = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}^\times \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$.

`Z32=Integers(32), Z32.unit_group_exponent(), Z32.unit_gens()`

22. Décrire les groupes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}^\times$ et $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{Z}/81\mathbb{Z}^\times$.