

Polynômes

1 Domaine de calcul

1. Comment expliquez-vous la différence entre

```
sage: q=(a-2)*(a+3)
sage: q
```

et

```
sage: A.<x>=QQ['x']
sage: p=(x-2)(x+3)
sage: p
```

?

Vous pouvez par exemple utiliser `x.parent()`, `p.parent()`.

2. Pour $n = 1, \dots, 20$ donnez les facteurs irréductibles (sur $\mathbb{Q}$) des polynômes $\Phi_n(X) = X^n - 1$.

```
p.factor()
```

3. Vérifier que les racines de $X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1$ sont les racines primitives 15^e de l'unité `p.roots(QQbar)`.

2 Cubiques, paramétrage et élimination

4. Tracer la courbe paramétrique d'équation $\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$: En déduire une équation cartésienne de cette courbe.

```
sage: var('t')
sage: x=(1-t^2)/(1+t^2)
sage: y=2*t/(1+t^2)
sage: parametric_plot((x,y),(t,-10,10))
```

5. Tracer la courbe paramétrique d'équation $\begin{cases} x = 1 - 3t^2 \\ y = t(3 - t^2) \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

6. Calculer le résultant $R(x, y)$ des polynômes $x - 1 + 3t^2$ et $y - t(3 - t^2)$: `p.resultant(q,t)`.

Tracer la courbe $R(x, y) = 0$ avec `implicit_plot()`.

Nous considérons maintenant la courbe d'équation $3x^3 + 5xy^2 + 5x^2 - 5y^2 = 0$

7. Tracer cette courbe.

8. Pour une pente t , déterminer les coordonnées de l'intersection non-nulle de cette courbe avec la droite d'équation $y = tx$.

9. En déduire une paramétrisation de cette courbe.

10. Tracer la courbe paramétrique d'équation $\begin{cases} x = \frac{t^2+1}{2t} \\ y = \frac{2t-1}{t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$
11. Comme précédemment donner une équation cartésienne de cette cubique.

3 Corps de nombres

12. Vérifier que sage connaît les formules de CARDAN : donner les racines de $x^3 - 6x^2 + 9x - 1$: `solve(p,x)`.

13. Donner le discriminant du polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Sous quelle forme connaît-on en général le discriminant des polynômes de degré 3 ?

```
FractionField(PolynomialRing(QQ,'a,b,c,d')) ; p.discriminant()
```

14. Donner le polynôme minimal (sur $\mathbb{Q}$) de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

```
F.<x,y>=Q['x,y']; F.quotient(F.ideal(x^2-2,y^2-3))
```

15. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est un élément primitif de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
16. Donner un élément primitif de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

```
sage: A.<x>=QQ[]
sage: p=x^2-2
sage: K=NumberField(p)
sage: B.<y>=K[]
sage: q=y^2-3
sage: L=NumberField(q)
sage: L.absolute_generator()
sage: a=K.gen(); b=L.gen(); (a+b).absolute_polynomial()
```

17. Donner le polynôme minimal de $5^{1/7} \cdot 3^{1/5} + 2^{1/3}$
18. Définir $L = \mathbb{Q}[x]/x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Vérifier que $[L : \mathbb{Q}]$ est une extension galoisienne. En déduire son groupe de GALOIS.
19. Vérifier que $\mathbb{Q}[x]/x^3 - x + 1$ n'est pas une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$. Donner sa clôture galoisienne avec son groupe de GALOIS