

Ce devoir est avant tout un exercice de rédaction, vous serez très attentif à l'utilisation des variables qui seront toutes précédées d'un quantificateur, vous préciserez les normes utilisées.

Exercice I. Soit E et F deux espaces vectoriels normés.

1. Soit $f, g : E \rightarrow F$ deux applications continues. Montrer que l'application $h = f + g$ est continue.
2. Soit $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues. Montrer que l'application $f \cdot g$ est continue.
3. En déduire que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ (vu comme une application $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) est continu.
4. Déduire de la première question que le déterminant : $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ et la multiplication des matrices : $M_{m,n}(\mathbb{R}) \times M_{n,r}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{m,r}(\mathbb{R})$ sont continus.

Exercice II. 1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que le déterminant, $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ est continue et surjective.
4. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Exercice III. Soit $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal.

1. Montrer que tous les coefficients d'une matrice orthogonale appartiennent à $[-1; 1]$.
2. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est borné.
3. Montrer que l'application $M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ est continue.
 $A \mapsto A^t A$
4. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé.
5. Conclure que $O_n(\mathbb{R})$ est compact.
6. Montrer de même que $SO_n(\mathbb{R})$ est compact.

Exercice IV. 1. Montrer que pour toute matrice $A \in SO_3(\mathbb{R})$, il existe $\theta_0 \in [0; \pi]$, il

existe une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}AP = R_{\theta_0} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que pour toute matrice orthogonale P , l'application $\mathbb{R} \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$ est continue.
 $\theta \mapsto PR_{\theta}P^{-1}$
3. Conclure que $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe.