

Exercice 1 *Questions de cours.*

- 1) a. Définir ce qu'est un espace métrique compact.
b. Énoncer précisément et démontrer le théorème concernant l'image d'un compact par une application continue.
- 2) a. Définir ce qu'est un espace métrique connexe.
b. Énoncer précisément et démontrer le théorème concernant l'image d'un connexe par une application continue.
- 3) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
a. Soient a et b deux points de E . Qu'appelle-t-on *segment* $[a, b]$?
b. Donner la définition d'une partie $C \subset E$ convexe.
c. Énoncer le théorème de la projection d'un espace de Hilbert sur un convexe fermé.

Exercice 2 Soit T le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

- 1) Montrer que T est compact.
- 2) Montrer que T est connexe par arcs.

Exercice 3 Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E . Soit f une application $f : K \rightarrow K$ telle que

$$\forall x \neq y \in K, \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

- 1) Montrer que f est continue sur K .
- 2) Montrer que l'application $F : K \rightarrow \mathbb{R}^+$, définie par $F(x) = \|f(x) - x\|$ est continue.
- 3) En déduire que F atteint son minimum en un point $x_0 \in K$.
- 4) Montrer que x_0 est un point fixe de f . Montrer que ce point fixe est unique.

Exercice 4 Soit c_0 l'ensemble de suites réelles convergentes munies de la norme $\|u\| := \sup_n |u_n|$, pour toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit

$$L : \begin{cases} c_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \end{cases}$$

Montrer que L est une application linéaire continue. Calculer sa norme.

Exercice 5 Soit E un espace vectoriel normé complet et soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ouverts denses dans E . On veut montrer que $\bigcap_n U_n$ est dense dans E (*Théorème de Baire*).

1. Soit O un ouvert non vide de E . Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $O \cap U_n \neq \emptyset$.
2. Soit V un ouvert non vide de E . Montrer qu'il existe une boule fermée telle que $B'(a_1, r_1) \subset V \cap U_1$.
3. Montrer qu'il existe une boule fermée $B'(a_2, r_2)$ telle que $B'(a_2, r_2) \subset B'(a_1, r_1) \cap U_2$ et $r_2 \leq \frac{r_1}{2}$.
4. On suppose qu'il existe une suite *décroissante* de boules fermées $B'(a_k, r_k)$, $k = 1 \dots n-1$, telles que $B'(a_k, r_k) \subset U_k$ et $r_k \leq \frac{r_1}{2^{k-1}}$. Montrer qu'il existe une boule fermée $B'(a_n, r_n)$ telle que $B'(a_n, r_n) \subset B'(a_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n$ et $r_n \leq \frac{r_1}{2^{n-1}}$.
5. Montrer que $V \cap \bigcap_n U_n \neq \emptyset$. Conclure.
6. Montrer qu'une réunion dénombrable de fermés de E d'intérieurs vides est d'intérieur vide.