Exercice 1 [Questions de cours]

- 1) Donner la définition d'un ouvert dans un espace vectoriel normé E . Montrer que l'intersection de deux ouverts est un ouvert.
- 2) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application norme est continue :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

- 3) Montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ entre espaces vectoriels normés que l'on suppose k -lipschitzienne est uniformément continue.
- 4) Énoncer précisément et démontrer le théorème concernant l'image d'un compact par une application continue.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^2$, nous considérons les ensembles suivants :

- le segment unité vertical : $I = \{0\} \times [0; 1]$
- le disque ouvert D de centre $J = (0, 1)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
- le demi-cercle inférieur S qui borde D : $S = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4} \text{ et } y < 1\}$.

- 1) Faire un dessin.
- 2) I , D et S sont-ils ouverts ? Fermés ?
- 3) On considère $L = I \cup D \cup S$.
 - a) Décrire l'adhérence $\bar{L}$ et l'intérieur $\overset{\circ}{L}$ de L .
 - b) Comparer $\bar{L}$ et $\overset{\circ}{L}$.
- 4) Soit $V_1(L) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \exists A \in L, d(M, A) < 1\}$.
 - a) Dessiner $V_1(L)$.
 - b) Montrer que $V_1(L)$ est ouvert.

Exercice 3 Soit F un fermé d'un espace métrique (E, d) . Montrer que pour toute partie A de E on a l'équivalence :

$$A \cup F = E \iff \overset{\circ}{A} \cup F = E.$$

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On définit sur E trois normes par, si $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^n |a_i|, \quad N_2(P) = \sqrt{\sum_{i=0}^n a_i^2}, \quad N_\infty(P) = \max_{i=0}^n |a_i|.$$

- 1) Vérifiez que N_1 et N_∞ sont des normes sur E .
- 2) Donner le produit scalaire associé à N_2 . En déduire que N_2 est une norme.
- 3) Montrer que $N_\infty(P) \leq N_2(P) \leq N_1(P)$?
- 4) Trouver une suite de polynômes $(P_n)_n$ telle que $N_2(P_n) \rightarrow 0$ et $N_1(P_n) = 1$.
- 5) Trouver une suite de polynômes $(Q_n)_n$ telle que $N_\infty(Q_n) = 1$ et $N_2(Q_n) \rightarrow \infty$.
- 6) En déduire que ces normes ne sont pas deux à deux équivalentes.
- 7) Montrer que l'application $P \mapsto P(1)$ est continue pour la norme N_1 mais pas pour la norme N_∞ .