

Exercice 1 Répondre aux affirmations suivantes en justifiant vos réponses.

- Si (E, d) est complet alors toute partie $A \subset E$ est complète : VRAI FAUX.
- Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy : VRAI FAUX.
- Si f est une application continue définie sur un compact K alors $f(K)$ est compact : VRAI FAUX.

Exercice 2 Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé E . Soit $f : A \rightarrow A$ une application vérifiant : $\forall x, y \in A, x \neq y, \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

- 1) Montrer que f est continue.
- 2) Montrer que l'application $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \|f(x) - x\|$ est continue.
- 3) On suppose à présent que A est compact. Montrer que F atteint son minimum en un point $x_0 \in A$ tel que $f(x_0) = x_0$.
- 4) Donner un exemple d'une partie fermée A de $\mathbb{R}$ et d'une application $g : A \rightarrow A$ telle que $\forall x, y \in A, x \neq y, \Rightarrow \|g(x) - g(y)\| < \|x - y\|$ et qui n'admet pas de point fixe.

Exercice 3 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On fixe deux points $a \in E$ et $b \in E$. On définit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow E, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = tb + (1 - t)a$$

- 1) Montrer que f est continue ($\mathbb{R}$ étant muni de sa norme canonique).
- 2) En déduire que le sous-ensemble de E défini par :

$$[a, b] = \{ x = tb + (1 - t)a \mid t \in [0, 1] \}$$

est compact.

- 3)(difficile) Soit K un compact de E , montrer que $K_0 = \bigcup_{x, y \in K} [x, y]$ est compact.

Exercice 4 Soient X et Y deux parties compactes dans un espace normé. On définit :

$$X + Y = \{ z \in E \mid z = x + y, x \in X, y \in Y \}.$$

En utilisant la propriété de Bolzano-Weierstrass, montrer que $X + Y$ est compact.