Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie et analyse

Examen 2e session
juin 2014

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Trois heures, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : T. Coulbois, G. Rond

Exercice I. (Cours)

1. Donner la définition d'une suite de Cauchy dans un espace métrique.

2. Montrer qu'une suite convergente est toujours une suite de Cauchy.

3. Donner la définition d'un espace métrique complet.

4. Donner la définition d'un espace métrique compact.

5. Démontrer que l'image d'un compact par une application continue est compact.

Exercice II. On considère l'espace vectoriel L des fonctions continues définies sur $[0,1]$. On considère les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ sur L définies par :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

1. Montrer que $(L, \| \ \|_\infty)$ est un espace complet

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^n$. Calculer $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n\|_1$.

3. Montrer que les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ ne sont pas équivalentes

4. *(un peu plus difficile)* Montrer que $(L, \| \ \|_1)$ n'est pas un espace complet.

Exercice III. Soit E et F deux espaces métriques et une application $f : E \to F$.

1. Montrer que si f est continue alors pour toute partie A de E on a $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

2. Montrer la réciproque : si pour toute partie A de E on a $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ alors f est continue *(on pourra, par exemple, montrer que l'image réciproque d'une partie fermée B est fermée en posant $A = f^{-1}(B)$ et en montrant que $f(\overline{A}) \subset B$).*

Exercice IV. On se place dans le plan euclidien.

1. Soit A et B deux parties connexes ayant au moins un point commun. Montrer que $A \cup B$ est connexe.

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble dénombrables de parties connexes contenant toutes l'origine $O = (0,0)$. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est connexe.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ On considère le cercle S_n de centre $(0, -\frac{1}{n})$ et de rayon $\frac{1}{n}$:

$$S_n = \{(x,y) \mid x^2 + (y + \frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n^2}\}$$

a. Faire un dessin des S_n (avec au moins $n = 1,2,3,4$).

b. La boucle d'oreilles hawaïenne est l'ensemble $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} S_n$. Montrer que S est connexe.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ On considère maintenant le cercle Σ_n de centre $(0,n)$ passant par l'origine.

a. Faire un dessin des Σ_n (avec au moins $n = 1,2,3,4$).

b. Déterminer l'adhérence de $\Sigma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Sigma_n$.

Tournez SVP

Exercice V. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$ où $a \geq 0$. On considère la norme $||\cdot||_\infty$ définie sur E par

$$||f||_\infty := \sup_{x \in [0,a]} |f(x)| \quad \forall f \in E.$$

On définit alors l'application L de E dans E par

$$L(f)(x) := \frac{1}{2} f(x) + \int_0^x f(t)dt \quad \forall f \in E,\ \forall x \in [0, a].$$

1. Montrer que l'on a bien $L(E) \subset E$.

2. Montrer que L est lipschitzienne.

3. Trouver pour quelle(s) valeur(s) de a il existe une *unique* fonction $g \in E$ telle que $L(g) = g$.