Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2

Devoir à la maison
à rendre le
jeudi 14 novembre 2014

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : T. Coulbois, P. Mercat

Vous porterez une attention particulière sur la rédaction.

Exercice I. Pour un réel $m \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $B_m = \begin{pmatrix} 3 & m+2 & 1 \\ -m & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de B_m. Pour quelles valeurs de m la matrice B_m est-elle inversible ?

> Le calcul nous donne $\det(B_m) = -3(m+1)^2+30$, nous en déduisons que ce déterminant est nul si, et seulement si, $m = -1 \pm \sqrt{10}$. La matrice B_m est donc inversible pour $m \neq -1 \pm \sqrt{10}$

2. Calculer le polynôme caractéristique χ_m de B_m.

> Le calcul nous donne en développant par rapport à la 3e ligne $\chi_m(X) = -(X+3)(X^2 + m^2 + 2m - 9)$.

3. Pour quelles valeurs du paramètre m, matrice B_m possède-t'elle trois valeurs propres distinctes ?

> Le facteur de degré 2, $P_m(X) = X^2 + m^2 + 2m - 9$, possède deux racines réelles distinctes si, et seulement si, $m^2+2m-9 < 0$. Or les racines de ce polynôme de degré 2 en m sont $m = -1 \pm \sqrt{10}$ et il est négatif entre ses racines. Donc
>
> $$m^2 + 2m - 9 < 0 \iff m \in]-1-\sqrt{10}; -1+\sqrt{10}[.$$
>
> Pour que les trois valeurs propres de B_m soient distinctes, il faut de plus que -3 ne soit pas racine du facteur de degré 2, c'est-à-dire que
>
> $$P_m(-3) \neq 0 \iff m^2 + 2m \neq 0 \iff m \neq 0 \text{ et } m \neq -2.$$
>
> Finalement :
> - Pour $m \in]-1-\sqrt{10}; -2[\cup]-2; 0[\cup]0; -1+\sqrt{10}[$, la matrice B_m possède trois valeurs propres réelles distinctes.
> - Pour $m \in]-\infty; -1-\sqrt{10}[\cup]-1+\sqrt{10}; +\infty[$, la matrice B_m possède trois valeurs propres distinctes (dont deux complexes non réelles).

4. Pour quelles valeurs de m la matrice B_m est-elle diagonalisable ?

D'après la question précédente pour $m \in]-1-\sqrt{10};-2[\cup]-2;0[\cup]0;-1+\sqrt{10}[$, la matrice B_m est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ et pour $m \in]-\infty;-1-\sqrt{10}[\cup]-1+\sqrt{10};+\infty[$, la matrice B_m est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
Puisque -3 est toujours valeur propre nous calculons d'abord le sous-espace propre associé à la valeur propre -3, E_{-3} :

$$B_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 6x & + & (m+2)y & + & z & = & 0 \\ -mx & & & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Si $m \neq 0$, le sous-espace propre associé à la valeur propre -3 est donc une droite vectorielle (de dimension 1). Notons que $u_{-3} = \begin{pmatrix} 0 \\ m+2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est (toujours) un vecteur propre associé à la valeur propre -3.
Nous distinguons maintenant les quatre cas restants : $m \in \{-1-\sqrt{10};-2,0;-1+\sqrt{10}\}$.

– $\boxed{m = -1 \pm \sqrt{10}}$, alors $\chi_m(X) = -X^2(X+3)$. Les valeurs propres de B_m sont 0 et -3. Nous calculons le noyau de B_m :

$$B_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & (m+2)y & + & z & = & 0 \\ -mx & - & 3y & & & = & 0 \\ & & & & -3z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrrcl} 3x & + & (m+2)y & & = & 0 \\ & & ((m+2)m-9)y & & = & 0 \\ & & & z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+(m+2)y & = & 0 \\ (m^2+2m-9)y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+(m+2)y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \text{ car dans ce cas } (m+1)^2-10=0$$

Le noyau est donc une droite vectorielle de dimension 1. Les sous-espaces propres de B_m sont donc le noyau de dimension 1 et E_{-3} de dimension 1. La matrice B_m n'est donc pas diagonalisable.

– $\boxed{m = 0}$, alors $\chi_0(X) = -(X+3)^2(X-3)$, les valeurs propres de B_0 sont -3 et 3. Le sous-espace propre E_{-3} a pour équation $6x+2y+z=0$, c'est un plan vectoriel.
Calculons le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 : E_3

$$B_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & (m+2)y & + & z & = & 0 \\ -mx & - & 6y & & & = & 0 \\ & & & & 6z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{comme } m=0 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2y & + & z & = & 0 \\ y & & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Le sous-espace propre E_3 de B_0 est une droite vectorielle engendrée par le vecteur propre $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La somme des dimensions des sous-espaces propres est $\dim(E_{-3}) + \dim(E_3) = 2+1 = 3$, La matrice B_0 est donc diagonalisable.

– $\boxed{m=-2}$, alors $\chi_{-2}(X) = -(X+3)^2(X-3)$, les valeurs propres de B_{-2} sont -3 et 3.

Le sous-espace E_{-3} a pour équation

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6x & + & (m+2)y & + & z & = & 0 \\ -mx & & & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 6x & & + & z & = 0 \\ 2x & & & & = 0 \end{array}\right.$$

C'est une droite vectorielle engendrée par le vecteur u_{-3}.

Calculons le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 : E_3

$$B_{-2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & (m+2)y & + & z & = & 0 \\ -mx & - & 6y & & & = & 0 \\ & & & & 6z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\text{comme } m=-2 \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} & & & z = & 0 \\ 2x & - & 6y & = & 0 \\ & & & z = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3y \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

Le sous-espace propre E_3 de B_{-2} est une droite vectorielle engendrée par le vecteur propre $u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La somme des dimensions des sous-espaces propres est $\dim(E_{-3}) + \dim(E_3) = 1+1 = 2 < 3$, La matrice B_{-2} n'est donc pas diagonalisable.