Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2

Examen
Jeudi 15 janvier 2015

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : T. Coulbois, P. Mercat

Deux heures, ni documents, ni calculatrice

Exercice 1. (cours) 1. Donner la définition de la matrice d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E par rapport à une base $\mathcal{B}$.
2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E ayant pour valeurs propres 1, 2 et 3. Montrer que les sous-espaces propres associés E_1, E_2 et E_3 (respectivement) sont en somme directe.
3. Donner la définition de la signature d'une permutation.

Exercice 2. Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A_m.
2. Soit $Q(X) = X^3 - (m+2)X^2 + (2m+1)X$. Montrer que $Q(A_m) = mId_3$.
3. Pour $m \neq 0$, déduire l'inverse A_m^{-1} de la question précédente.
4. Pour $m = 3$, montrer que la matrice A_3 est diagonalisable et donner une matrice de passage P_3 telle que $P_3^{-1}A_3P_3$ est diagonale (inutile de calculer l'inverse de P_3).
5. Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, montrer que A_m n'est pas diagonalisable.
6. Pour $m = 1$, montrer que la matrice A_1 n'est pas diagonalisable et donner une matrice P_1 telle que $P_1^{-1}A_1P_1$ est triangulaire.

Exercice 3. On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit f un endomorphisme de E diagonalisable, soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f (pas nécessairement distinctes) et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres associés (respectivement). Soit v un vecteur de E de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ (nous rappelons que par définition $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$.
1. Calculer les coordonnées, par rapport à la base $\mathcal{B}$, de $f(v)$, puis celles de $f^2(v)$ et enfin celles de $f^k(v)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
2. En reconnaissant un déterminant de Vandermonde, établir l'équivalence des conditions suivantes :
(i) $(v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ est une base de E
(ii) les valeures propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de f sont deux à deux distinctes et les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de v sont toutes non nulles

Exercice 4. Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On suppose $n \geq 1$. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker}(\Delta)$.
2. En déduire que $\operatorname{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Avec $V(X) = X^n$, Montrer que $\mathcal{B} = (V, \Delta(V), \Delta^2(V), \ldots, \Delta^n(V))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Donner la matrice de Δ dans cette base.