Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2

Deux heures, ni documents, ni calculatrice

Examen
Jeudi 15 janvier 2015

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : T. Coulbois, P. Mercat

Exercice 1. **(cours) 1.** Donner la définition de la matrice d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E par rapport à une base $\mathcal{B}$.
2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E ayant pour valeurs propres 1, 2 et 3. Montrer que les sous-espaces propres associés E_1, E_2 et E_3 (respectivement) sont en somme directe.
3. Donner la définition de la signature d'une permutation.

Exercice 2. Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A_m.

Un rapide calcul nous donne le polynôme caractéristique de A_m :

$$\chi_m(X) = \det(A_m - XI_3) = -(X-1)^2(X-m).$$

2. Soit $Q(X) = X^3 - (m+2)X^2 + (2m+1)X$. Montrer que $Q(A_m) = mId_3$.

D'après le calcul précédent

$$\chi_m(X) = -(X^2 - 2X + 1)(X - m) = -X^3 + (2+m)X^2 - (2m+1)X + m = m - Q(X).$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_m(A_m) = 0$ et donc $mI_3 - Q(A_m) = 0$ c'est-à-dire $Q(A_m) = mI_3$.

3. Pour $m \neq 0$, déduire l'inverse A_m^{-1} de la question précédente.

En factorisant X dans $Q(X)$ nous obtenons $Q(X) = X(X^2 - (m+2)X + (2m+1))$ et donc d'après la question précédente :

$$\frac{1}{m}Q(A_m) = A_m \cdot \frac{1}{m}\left(A_m^2 - (m+2)A_m + (2m+1)I_3\right) = I_3.$$

La matrice inverse de A_m est donc

$$A_m^{-1} = \frac{1}{m}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & m+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m^2 \end{pmatrix} - (m+2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & m \end{pmatrix} + (2m+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{m}\begin{pmatrix} m & 2-m & -1 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Pour $m = 3$, montrer que la matrice A_3 est diagonalisable et donner une matrice de passage P_3 telle que $P_3^{-1}A_3P_3$ est diagonale (inutile de calculer l'inverse de P_3).

Pour $m = 3$, les valeurs propres de A_m sont 1 de multiplicité algébrique 2 et 3 de multiplicité algébrique 1. Calculons le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff A_m X = X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y + z & = & 0 \\ 2y + (m-1)z & = & 0 \end{array} \right.$$

Comme ici $m = 3$, E_1 est un plan vectoriel d'équation $y+z = 0$ et la multiplicité géométrique de la valeur propre 1 est 2, elle coïncide avec la multiplicité algébrique et donc A_m est diagonalisable. Une base de E_1 est donné par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Déterminons le sous-espace propre E_m associé à la valeur propre (dont nous savons qu'il est de dimension 1) :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_m \iff A_m X = X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} (1-m)x + y + z & = & 0 \\ (1-m)y & = & 0 \\ 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi E_m a pour équation $y = 0$ et $(1-m)x + z = 0$, et a pour base $v_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m-1 \end{pmatrix}$.

Le calcul de E_m est général, mais dans le cas où $m = 3$, avec la matrice $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, nous obtenons $P_3^{-1} A_3 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, montrer que A_m n'est pas diagonalisable.

Pour $m \neq 1, 3$, A_m possède deux valeurs propres 1 et m de multiplicité algébrique 2 et 1 respectivement. D'après la question 4. le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 a pour équation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y + z & = & 0 \\ 2y + (m-1)z & = & 0 \end{array} \right. \iff y = z = 0 \text{ (car } m \neq 3\text{)},$$

c'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur propre e_1. La multiplicité géométrique de la valeur propre 1 est donc $\text{mult}_{\text{géom}}(1) = 1 < 2 = \text{mult}_{\text{alg}}(1)$. La matrice A_m n'est donc pas diagonalisable.

6. Pour $m = 1$, montrer que la matrice A_1 n'est pas diagonalisable et donner une matrice P_1 telle que $P_1^{-1} A_1 P_1$ est triangulaire.

D'après le calcul de la question précédente E_m le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est une droite vectorielle d'équation $y = 0$ et $z = 0$, et a pour base $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractérstiques est $\chi_1(X) = -(X-1)^3$. La multiplicité géométrique de la valeur propre 1 est 1 et strictement plus petite que sa multiplicité algébrique qui est 3. La matrice A_1 n'est donc pas diagonalisable.
Cherchons un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $A_1X = X + ae_1$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & x+a \\ y & = & y \\ 2y+z & = & z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & a \\ & & \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Soit $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $A_1e_3 = e_1 + e_3$, complétons par $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, pour obtenir une base $\mathcal{B}' = (e_1, e_3, e_2)$ et une matrice de passage $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Un rapide calcul nous donne $A_1e_2 = e_1 + 2e_3 + e_2$ et donc

$$P_1^{-1}A_1P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice triangulaire cherchée.

Exercice 3. On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit f un endomorphisme de E diagonalisable, soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f (pas nécessairement distinctes) et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres associés (respectivement). Soit v un vecteur de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ (nous rappelons que par définition $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$.
1. Calculer les coordonnées, par rapport à la base $\mathcal{B}$, de $f(v)$, puis celles de $f^2(v)$ et enfin celles de $f^k(v)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

On a $f(v) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) = \lambda_1x_1e_1 + \cdots + \lambda_nx_ne_n$. Donc $[f(v)]_{\mathcal{B}} = (\lambda_1x_1, \cdots, \lambda_nx_n)$.
On a ensuite $f^2(v) = f(\lambda_1x_1e_1 + \cdots + \lambda_nx_ne_n) = \lambda_1x_1f(e_1) + \cdots + \lambda_nx_nf(e_n) = \lambda_1^2x_1e_1 + \cdots + \lambda_n^2x_ne_n$, et donc $\left[f^2(v)\right]_{\mathcal{B}} = (\lambda_1^2x_1, \cdots, \lambda_n^2x_n)$.
Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $f^k(v) = f(\lambda_1^{k-1}x_1e_1 + \cdots + \lambda_n^{k-1}x_ne_n) = \lambda_1^{k-1}x_1f(e_1) + \cdots + \lambda_n^{k-1}x_nf(e_n) = \lambda_1^kx_1e_1 + \cdots + \lambda_n^kx_ne_n$, et donc $\left[f^k(v)\right]_{\mathcal{B}} = (\lambda_1^kx_1, \cdots, \lambda_n^kx_n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. En reconnaissant un déterminant de Vandermonde, établir l'équivalence des conditions suivantes :
(i) $(v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est une base de E
(ii) les valeures propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de f sont deux à deux distinctes et les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ de v sont toutes non nulles

$(v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est une base de E si et seulement si le déterminant de la matrice de cette famille dans la base $\mathcal{B}$ est non nul. Or, d'après la question précédente, ce déterminant est de la forme

$$\begin{vmatrix} x_1 & \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} x_1 \\ x_2 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & \lambda_n x_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} x_n \end{vmatrix} = x_1 x_2 \cdots x_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Cette dernière étape étant obtenue en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses lignes. On reconnait alors un déterminant de VANDERMONDE qui est non nul si et seulement si les λ_i sont deux à deux distincts. D'où l'équivalence entre (i) et (ii).

Exercice 4. Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On suppose $n \geq 1$. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker}(\Delta)$.

Soit $P \in \operatorname{Ker}(\Delta)$. On a alors $P(X) = P(X+1)$. En particulier, on a $P(0) = P(1) = P(2) = \dots = P(n)$ pour tout entier n. Le polynôme P - P(0) s'annule sur tous les entiers : c'est donc le polynôme nul, et donc le polynôme P est constant. Réciproquement, on vérifie que les polynômes constants sont dans le noyau de Δ. On a donc l'égalité $\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.

2. En déduire que $\operatorname{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Si P est un polynôme non nul, les termes dominants des polynômes $P(X)$ et $P(X+1)$ sont identiques et donc $\deg(\Delta(P)) < \deg(P)$. On a donc l'inclusion $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subseteq \operatorname{Im}(\Delta)$. Le théorème du rang nous donne alors que $\dim(\operatorname{Im}(\Delta)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\operatorname{Ker}(\Delta)) = (n+1) - 1 = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ d'après la question précédente. Ainsi, cette inclusion d'espaces vectoriels est une égalité.

3. Avec $V(X) = X^n$, Montrer que $\mathcal{B} = (V, \Delta(V), \Delta^2(V), \dots, \Delta^n(V))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout polynôme P non nul, on a l'égalité $\deg(\Delta(V)) = \deg(V) - 1$. En effet, si $P(X) = aX^k + Q(x)$ avec $k \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$ et $\deg(Q) < \deg(P)$, alors $\Delta(P) = a((X+1)^k - X^k) + \Delta(Q)$ est de degré $k-1$ puisque $(X+1)^k - X^k$ est de degré $k-1$ et que $\deg(\Delta(Q)) < \deg(Q) \leq k-1$. Ainsi, pour V polynôme de degré n, on a $\Delta^k(V)$ qui est de degré $n-k$ pour tout $0 \leq k \leq n$. La famille $\mathcal{B} = (V, \Delta(V), \Delta^2(V), \dots, \Delta^n(V))$ est donc une base puisqu'elle est étagée en degrées et de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.

4. Donner la matrice de Δ dans cette base.

La matrice de Δ dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque l'on a $\Delta^{n+1}(V) = 0$ (car $\deg(\Delta^{n+1}(V)) = -1$) et $\Delta(\Delta^k(V)) = \Delta^{k+1}(V)$ pour tout $0 \leq k \leq n$.