Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

**Licence de mathématiques**, 2e année
Algèbre Linéaire 2

*Deux heures, ni documents, ni calculatrice*

**Examen 2e session**
Mardi 23 juin 2015

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : T. Coulbois, P. Mercat

**Exercice 1. (cours)**

**1.** Donner la définition des valeurs propres et des vecteurs propes d'un endomorphisme.

**2. a.** Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

**b.** Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton pour une matrice $A$ diagonalisable.

**3. a.** Donner le cardinal du groupe symétrique $S_n$.

**b.** Donner la signature du cycle $(1\ 2\ 3\ \dots\ \ell)$.

**Exercice 2.** Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & m & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

**1.** Calculer le polynôme caractéristique de $A_m$.

Calculons le déterminant par blocs :

$$\chi_m(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 & 3 \\ -1 & -\lambda & m & 5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)(\lambda^2 - 1)$$

$$= (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

**2.** Donner les valeurs propres de $A_m$ en précisant leurs multiplicités algébriques.

Les valeurs propres de $A_m$ sont les racines du polynômes caractéristiques, ce sont donc 1, $-1$ et 2. Les multiplicités algébriques sont les exposants dans le polynôme caractéristique :

$$\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(1) = 2, \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(-1) = 1, \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(2) = 1$$

**3.** La matrice $A_m$ est-elle trigonalisable ?

Le polynôme caractéristique est scindé, matrice $A_m$ est donc trigonalisable.

**4.** Donner des équations du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

Déterminons le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & x_1 \\ -x_1 & & & + & mx_3 & + & 5x_4 & = & x_2 \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & = & x_3 \\ & & & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & x_4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & -x_2 & + & mx_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & - & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & - & mx_3 & - & 5x_4 & = & 0 & (-L2) \\ & & & & (2m-2)x_3 & + & 13x_4 & = & 0 & (L1+2L2) \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & - & mx_3 & - & 5x_4 & = & 0 & \\ & & & & (2m-15)x_3 & & & = & 0 & (L2-13L3) \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 & \end{array}\right.$$

Si $2m-15 \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq \frac{15}{2}$, alors le système devient :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = x_4 = 0 \end{array}\right.$$

et le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Si $m = \frac{15}{2}$ alors le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - \frac{5}{2}x_3 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

et le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 2.

**5.** Pour quelles valeurs de $m$ la matrice $A_m$ est-elle diagonalisable.

Les valeurs propres $-1$ et 2 de $A_m$ sont de mulitplicités algébriques 1. Elles sont donc aussi de mulitplicités géométriques 1 (car pour toute valeure propre la multiplicité géométrique est comprise entre 1 et la multiplicité algébrique).
La valeur propre 1 est de multiplicité algébrique 2. D'après la question précédente, pour $m \neq \frac{15}{2}$, sa multiplicité géométrique est 1 :

$$\mathrm{mult}_{\text{géom}}(1) = 1 < 2 = \mathrm{mult}_{\text{alg}}(1),$$

dans ce cas, la matrice $A_m$ n'est pas diagonalisable.
En revanche pour $m = \frac{15}{2}$ les multiplicités algébriques et géométriques de 1 sont égales à 2 et $A_{\frac{15}{2}}$ est diagonalisable.

**6.** Pour $m = 0$, donner une matrice de passage $P_0$ telle que $P_0^{-1}A_0P_0$ est triangulaire supérieure.

Pour $m=0$, d'après les questions précédentes, $A_0$ est trigonalisable mais n'est pas diagonalisable. Son sous-espace propre associé à la valeur propre 1 a pour équations :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ x_3=x_4=0 \end{array}\right.$$

C'est une droite vectoriel engendré par le vecteur propre $e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Calculons le sous-espace propre associé à la valeur propre $-1$ :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -x_1 \\ -x_1 & & & + & mx_3 & + & 5x_4 & = & -x_2 \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & = & -x_3 \\ & & & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -x_4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & mx_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ & & & & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & mx_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ & & & & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

C'est bien une droite vectorielle. En prenant $x_3=1$ et $x_4=-3$, nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{rcrcc} 4x_1 & + & 2x_2 & = & 11 \\ -x_1 & + & x_2 & = & 15-m \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 6x_1 & = & 2m-19 \\ 6x_2 & = & 71-4m \end{array}\right.$$

En multipliant par 6 nous obtenons un vecteur propre associé à la valeur propre $-1$ : $e_{-1}=\begin{pmatrix}2m-19\\71-4m\\6\\-18\end{pmatrix}$.

Calculons enfin des équations du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2x_1 \\ -x_1 & & & + & mx_3 & + & 5x_4 & = & 2x_2 \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & = & 2x_3 \\ & & & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 2x_4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & mx_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ & & & & & + & x_4 & = & 0 \\ & & & - & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2 & = & 0 \\ x_3=x_4=0 & & \end{array}\right.$$

C'est bien une droite vectorielle engendrée par le vecteur propre $e_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Complétons ces trois vecteurs propres pour former une base de $\mathbb{R}^4$, par exemple par $e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, la matrice de passage de la base canonique vers la base $(e_1,e_{-1},e_2,e_4)$ trigonalise la matrice $A_0$ :

$$P_0=\begin{pmatrix}1 & 2m-19 & 2 & 0\\ -1 & 71-4m & -1 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 1\\ 0 & -18 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad P_0^{-1}A_0P_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & *\\ 0 & -1 & 0 & *\\ 0 & 0 & 2 & *\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

**7.** Pour $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trouver un vecteur $e'_1$ tel que $A_0 e'_1 = e_1 + e'_1$.

**8.** Soit $e_2$ un vecteur propre associé à la valeur propre 2 et $e_{-1}$ un vecteur propre associé à la valeur propre $-1$. Soit $\mathcal{B}'$ la base $(e_1, e'_1, e_2, e_{-1})$. Soit $P'_0$ la matrice de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{B}'$. Donner la matrice $P_0'^{-1} A_0 P'_0$. *(Attention il semble que tous les enseignants ne soient pas d'accord sur le sens de la matrice $P_0$, choisissez celui qui vous arrange !)*

**Exercice 3.** **1.** Écrire la permutation (1 3 5)(4 2 7 9) comme un produit de transpositions.
**2.** **a.** Écrire comme un produit de cycles à supports disjoints : (1 4 3)(1 2 3) et (1 2)(1 3).
**b.** Écrire (1 4 2 7 9) comme un produit de transpositions.
**c.** En utilisant les deux questions précédentes, écrire (1 4 2 7 9) comme un produit de cycles de longueur 3.