

Exercice 1. (cours)

1. Donner la définition des valeurs propres et des vecteurs propres d'un endomorphisme.
2. **a.** Énoncer le théorème de CAYLEY-HAMILTON.
- b.** Démontrer le théorème de CAYLEY-HAMILTON pour une matrice A diagonalisable.
3. **a.** Donner le cardinal du groupe symétrique S_n .
- b.** Donner la signature du cycle $(1\ 2\ 3\ \dots\ \ell)$.

Exercice 2. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & m & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A_m .
2. Donner les valeurs propres de A_m en précisant leurs multiplicités algébriques.
3. La matrice A_m est-elle trigonalisable ?
4. Donner des équations du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
5. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle diagonalisable.
6. Pour $m = 0$, donner une matrice de passage P_0 telle que $P_0^{-1}A_0P_0$ est triangulaire supérieure.
7. Pour $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trouver un vecteur e'_1 tel que $A_0e'_1 = e_1 + e'_1$.
8. Soit e_2 un vecteur propre associé à la valeur propre 2 et e_{-1} un vecteur propre associé à la valeur propre -1 . Soit $\mathcal{B}'$ la base (e_1, e'_1, e_2, e_{-1}) . Soit P'_0 la matrice de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{B}'$. Donner la matrice $P_0'^{-1}A_0P'_0$. (*Attention il semble que tous les enseignants ne soient pas d'accord sur le sens de la matrice P_0 , choisissez celui qui vous arrange !*)

Exercice 3. 1. Écrire la permutation $(1\ 3\ 5)(4\ 2\ 7\ 9)$ comme un produit de transpositions.

- 2. a.** Écrire comme un produit de cycles à supports disjoints : $(1\ 4\ 3)(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 2)(1\ 3)$.
- b.** Écrire $(1\ 4\ 2\ 7\ 9)$ comme un produit de transpositions.
- c.** En utilisant les deux questions précédentes, écrire $(1\ 4\ 2\ 7\ 9)$ comme un produit de cycles de longueur 3.