Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2

Une heure, ni documents, ni calculatrice

Partiel 1
Jeudi 16 octobre 2014

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : T. Coulbois, P. Mercat

Exercice 1. **(cours)** Soit $f : V \to V$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie V.

1. Rappeler la définition des coordonnées d'un vecteur u par rapport à une base $\mathcal{B}$ de V.

2. Définir la matrice de f par rapport à une base $\mathcal{B}$ de V.

3. Monter que si $\lambda \neq \mu$ sont deux valeurs propres disctinctes de f alors les sous-espaces propres E_λ et E_μ sont en somme directe.

Exercice 2. Soient P_0, P_1 et P_{-1} les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par :

$$P_1 = X(X-1), \quad P_{-1} = X(X+1), \quad P_0 = X^2 - 1.$$

(1) Montrer que P_0, P_1, P_{-1} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(0) = 0\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$.

(3) Déterminer $\dim(F)$, $\dim(G)$, $\dim(F \cap G)$ et $\dim(F+G)$.

Exercice 3. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Soit m un paramètre réel. On considère le vecteur $u_m = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$ et le sous-espace vectoriel V_m d'équation $2x - (m-1)z = 0$.

1. Pour quelles valeurs du paramètre m a-t'on $u_m \in V_m$?

2. Donner une équation cartésienne de la droite vectorielle D_m engendrée par u_m.

3. Donner une base de V_m

4. Trouver l'ensemble S des valeurs de m pour lesquelles les sous-espaces D_m et V_m sont supplémentaires.

5. Pour $m \in S$ et pour $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de E, trouver un nombre réel t tel que le vecteur $v - tu_m$ appartient à V_m.

6. Toujours pour $m \in S$, en déduire les coordonnées du projeté de v sur la droite D_m parallèlement à V_m en fonction de x, y, z.

Tournez SVP

Exercice 4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $\det(A)$. La matrice est-elle inversible ?

(2) Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.

(3) Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.

(4) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

(5) Donner une base B de vecteurs propres.