

Exercice 1. (cours) Soit $f : V \rightarrow V$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie V .

1. Rappeler la définition des coordonnées d'un vecteur u par rapport à une base $\mathcal{B}$ de V .
2. Définir la matrice de f par rapport à une base $\mathcal{B}$ de V .
3. Montrer que si $\lambda \neq \mu$ sont deux valeurs propres distinctes de f alors les sous-espaces propres E_λ et E_μ sont en somme directe.

Exercice 2. Soient P_0, P_1 et P_{-1} les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par :

$$P_1 = X(X - 1), \quad P_{-1} = X(X + 1), \quad P_0 = X^2 - 1.$$

- (1) Montrer que P_0, P_1, P_{-1} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Nous allons montrer que P_0, P_1, P_{-1} est une famille libre. Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ trois nombres réels tels que $\lambda_0 P_0(X) + \lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_{-1}(X) = 0$. Alors en prenant successivement $X = 0, X = 1$ et $X = -1$ nous obtenons $\lambda_0 = 0, 2\lambda_2 = 0$ et $2\lambda_1 = 0$ ce qui démontre que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et que la famille P_0, P_1, P_{-1} est libre et donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

- (2) Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit P et Q deux polynômes de F et λ et μ deux scalaires, alors $P(1) = Q(1) = 0$ et $(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0$ et donc $\lambda P + \mu Q$ appartient à F . Comme de plus le polynôme constant nul 0 est dans F , nous avons démontré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

De même nous montrerions que G est un sous-espace vectoriel en évaluant les polynômes en $X = 0$.

- (3) Déterminer $\dim(F)$, $\dim(G)$, $\dim(F \cap G)$ et $\dim(F + G)$.

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors

$$P \in F \iff P(1) = 0 \iff a + b + c = 0$$

$$P \in G \iff P(0) = 0 \iff c = 0$$

$$P \in F \cap G \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Nous constatons donc que F et G sont deux plans vectoriels distincts de $\mathbb{R}_2[X]$, alors que leur intersection est la droite vectorielle dirigée par le polynôme P_1 . Nous avons ainsi :

$$\dim(F) = \dim(G) = 2, \quad \dim(F \cap G) = 1 \text{ et } \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3$$

Exercice 3. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Soit m un paramètre réel. On considère le vecteur $u_m = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$ et le sous-espace vectoriel V_m d'équation $2x - (m - 1)z = 0$.

1. Pour quelles valeurs du paramètre m a-t-on $u_m \in V_m$?

Le vecteur u_m appartient au plan vectoriel V_m si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation définissant V_m :

$$2 \times 3 - (m - 1) \times m = 0 \iff m^2 - m - 6 = 0 \iff (m + 2)(m - 3) = 0 \iff m = -2 \text{ ou } m = 3$$

2. Donner une équation cartésienne de la droite vectorielle D_m engendrée par u_m .

Le vecteur u_m vérifie les équations $y = 0$ et $mx - 3z = 0$. Ces deux équations sont indépendantes et elles définissent donc la droite vectorielle engendrée par u_m :

$$D_m : \begin{cases} y = 0 \\ mx - 3z = 0 \end{cases}$$

3. Donner une base de V_m

Les vecteurs $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_m = \begin{pmatrix} m-1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan vectoriel V_m , ils forment donc une base de V_m .

4. Trouver l'ensemble S des valeurs de m pour lesquelles les sous-espaces D_m et V_m sont supplémentaires.

D_m et V_m sont en somme directe si, et seulement si, leur intersection est vide, c'est-à-dire si u_m n'appartient pas à V_m . D'après la première question cela se produit exactement lorsque $m \neq -2$ et $m \neq 3$.

Comme D_m est une droite vectorielle et V_m un plan vectoriel, nous pouvons conclure que ces deux sous-espaces sont supplémentaires si, et seulement si, ils sont en somme directe :

$$D_m \oplus V_m = \mathbb{R}^3 \iff m \neq -2 \text{ et } m \neq 3.$$

L'ensemble S est donc

$$S = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\} =]-\infty; -2[\cup]-2; 3[\cup]3; +\infty[$$

5. Pour $m \in S$ et pour $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de E , trouver un nombre réel t tel que le vecteur $v - tu_m$ appartient à V_m .

$v - tu_m \in V_m$ si, et seulement si, ses coordonnées $\begin{pmatrix} x - 3t \\ y \\ z - mt \end{pmatrix}$ vérifient l'équation cartésienne de V_m :

$$2(x - 3t) - (m - 1)(z - mt) = 0 \iff (m(m - 1) - 6)t = (m - 1)z - 2x \iff t = \frac{(m - 1)z - 2x}{(m + 2)(m - 3)}$$

6. Toujours pour $m \in S$, en déduire les coordonnées du projeté de v sur la droite D_m parallèlement à V_m en fonction de x, y, z .

Le projeté w du vecteur v sur la droite D_m parallèlement à V_m est l'unique vecteur $w \in D_m$ tel que $v - w \in V_m$. D'après la définition de la droite vectorielle D_m , il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $w = tu_m$. D'après la question précédente, $t = \frac{(m-1)z-2x}{(m+2)(m-3)}$ et donc finalement

$$w = \frac{(m - 1)z - 2x}{(m + 2)(m - 3)} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}.$$

Tournez SVP

Exercice 4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $\det(A)$. La matrice est-elle inversible ?

En développant par rapport à la première ligne

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

A est donc inversible.

(2) Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A .

Calculons :

$$AX_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc bien un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 1

(3) Calculer le polynôme caractéristique de A . En déduire l'ensemble des valeurs propres de A .

Toujours en développant par rapport à la première ligne nous obtenons :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(3+\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) + 8(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 9 + 8) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et -1 .

(4) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

Calculons les sous-espaces propres de A :

E_1 : Nous cherchons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = X$

$$\iff \begin{cases} -3x + 4y = x \\ -2x + 3y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff x = y$$

Le sous espace propre E_1 est donc un plan vectoriel de dimension 2.

E_{-1} : Comme -1 est valeur propre de A , le sous-espace propre E_{-1} est de dimension au moins 1.

Nous constatons donc que $\dim(E_1) + \dim(E_{-1}) \geq 3$ or la dimension est 3 donc A est diagonalisable.

(5) Donner une base B de vecteurs propres.

En reprenant les calculs de la question précédente, nous constatons que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base du sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1.

Le sous-espace propre E_{-1} est constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = -X$. Ce qui nous donne le système :

$$\begin{cases} -3x + 4y = -x \\ -2x + 3y = -y \\ -2x + 2y + z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ y = z \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_{-1} est donc la droite vectorielle dirigée par le vecteur $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs propres X_1, X'_1, X_{-1} forment une base de vecteurs propres de A .