Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2

Deux heures, ni documents, ni calculatrice

Partiel 2
Jeudi 27 novembre 2014

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : T. Coulbois, P. Mercat

Exercice 1. **(cours)**
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E.
1. Démontrer qu'un réel λ est valeur propre de f si et seulement si il est racine du polynôme caractéristique de f.
2. Donner la définition de la signature d'une permutation.
3. Donner la définition du déterminant de f.

Exercice 2. On considère les permutations $\alpha, \beta \in S_7$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer α et β en produit de cycles à supports disjoints.
2. Calculer $\alpha \circ \beta$.
3. Écrire α comme un produit de transpositions.

Exercice 3. Dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$, on considère les points $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (-1, 0, 0)$, $D = (0, -1, 0)$, $E = (0, 0, 1)$ et $F = (0, 0, -1)$.
1. Tracer le polyèdre $ABCDEF$ et montrer que c'est un octaèdre régulier.
2. Soit I le milieu de $[AE]$ et J le milieu de $[CF]$. Soit S le demi-tour d'axe (IJ).
a. Déterminer la matrice de S par rapport à la base canonique
b. Déterminer l'image de chacun des six sommets de l'octaèdre par ce demi-tour.
c. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de S.

Tournez SVP

Exercice 4. Soient $u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, on définit la suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ par

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 4u_n,\ \forall n \geq 0.$$

1. Posons $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer le vecteur V_{n+1} à l'aide du vecteur V_n et de la matrice M.

2. Donner l'expression de V_n à l'aide de la matrice M^n et de V_0.

3. Vérifier que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M. En déduire l'expression de u_n en fonction de n dans le cas où l'on a $u_0 = u_2 = 1$ et $u_1 = -1$.

4. Déterminer les valeurs propres de M.

5. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M, et soit

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

6. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

7. Calculer la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$ et son inverse.

8. Donner la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}$.

9. Vérifier que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (M')^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

10. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n.