Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Examen
jeudi 15 janvier 2015

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2

Enseignants : T. Coulbois, P. Mercat

Questions de cours potentielles

Définitions et énoncés

(1) Coordonnées d'un vecteur par rapport à une base
(2) Matrice d'une application linéaire
(3) Polynôme caractéristique
(4) vecteur propre, valeur propre, sous-espace propre
(5) Décomposition d'une permutation en produit de transpositions ou de cycles à supports disjoints
(6) Signature d'une permutation
(7) Forme n-linéaire alternée
(8) Déterminant de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n
(9) Déterminant d'une application linéaire
(10) Rang d'une matrice et mineurs
(11) Définition de la comatrice
(12) Formule de la comatrice
(13) Critère de trigonalisation
(14) Théorème de Cayley-Hamilton
(15) Lemme des noyaux
(16) Sous-espace caractéristique

Preuves

(1) Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique
(2) Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
(3) Théorème de diagonalisation (diagonalisable $\iff$ il existe une base de vecteurs propres $\iff$ la somme directe des sous-espaces propres est l'espace tout entier)
(4) Toutes les matrices d'un endomorphismes sont semblables
(5) si f est une forme k-linéaire alternée sur V, et $(x_1, \dots, x_k)$ est une famille liée alors $f(x_1, \dots, x_k) = 0$.
(6) Le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas du choix d'une base
(7) Soit f un endomorphisme de E et P un polynôme. Montrer que si λ est une valeur propre de f et $P(f) = 0$, alors $P(\lambda) = 0$
(8) Soit P un polynôme et f un endomorphisme, $V = \mathrm{Ker}(P(f))$ est stable par f : $\forall u \in V$, $f(u) \in V$.