Exercice I. **1.** Rappeler la définition de la division euclidienne.

2. Rappeler le théorème de Bézout.

3. Démontrer par récurrence le théorème de Bézout.

4. Rappeler le théorème des restes chinois.

Exercice II. On rappelle la déifinitiond de la suite de Fibonacci : $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Calculez les dix premiers termes de cette suite.

2. Trouvez des pommes de pin et des tournesols et vérifiez que le nombre de spirales qui apparaissent sur ces végétaux sont deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci.

3. Démontrez par récurrence que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.

Exercice III. Le calcul propositionnel officiel n'utilise que les symboles $\vee$ et $\neg$.

1. Quelle est leur signification ?

2. Quels sont les autres symboles du calcul propositionnel ? Comment les dérive-t-on des officiels ? Quels sont leurs tables de vérité ?

3. De même dans le calcul des prédicats officiel on n'utilise que les symboles $\forall$, $\vee$ et $\neg$. Expliquer la signification de $\forall$ et comment obtenir $\exists$.

Exercice IV. Donner dans le langage de l'arithmétique une formule qui définit

1. les nombres premiers ; **2.** les diviseurs d'un nombre ;

3. les couples de nombres premiers entre-eux ; **4.** les puissances de deux.

Exercice V. Lister les opérations que vous connaissez sur les entiers et leurs propriétés. Connaissez-vous d'autres *structures* ayant les mêmes opérations et/ou les mêmes propriétés ?

Exercice VI. Démontrer à partir des axiomes de Péano

1. que l'addition est associative ;

2. que la multiplication est commutative ;

3. que l'ordre est total.

Exercice VII. Un nombre est parfait s'il est égal à la somme des ses diviseurs stricts (ex : $6 = 1 + 2 + 3$).

1. Donnez quelques nombres parfaits

2. Donnez une formule de l'arithmétique de Péano qui définit les nombres parfaits

(on ne sait toujours pas s'il existe des nombres parfaits impairs)