

Exercice I. Proposez une utilisation de Sage pour trouver la proportion des différents chiffres dans l'écriture décimale de $\sqrt{2}$ (par exemple parmi les 50 premiers chiffres après la virgule il y a 8% de 3 et 14% de 8).

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420969807856967187537694 \dots$$

Vous pourrez utiliser la partie entière d'un nombre réel :

```
sage: floor(2.783)
2
```

Exercice II. On se propose d'utiliser Sage pour trouver une valeur approchée d'une solution de l'équation $\sin \sqrt{x^2 + 1} = x$

1. Comment utiliser Sage pour localiser une solution x_0 (c'est-à-dire trouver un intervalle contenant x_0).
2. On suppose qu'à la question précédente on a trouvé deux nombres $a < b$ tels que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Rappeler ce qu'est la méthode de recherche par dichotomie de x_0 .
3. Proposer un programme Sage pour calculer x_0 avec 100 chiffres décimaux de précision.
4. Dans votre programme de la question précédente quel type de nombres utilisez-vous ? Est-ce un bon choix et pourquoi ?

Exercice III. Comment utiliseriez-vous Sage pour déterminer l'asymptote au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 3} - \sqrt[3]{8x^3 + 7x^2 + 1}$

Exercice IV. Nous savons que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique. Nous voulons utiliser Sage pour déterminer la structure du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/64\mathbb{Z})^\times$:

```
sage: euler_phi(64)
32
sage: Z64=Integers(64)
sage: Z64.unit_group_order()
32
sage: Z64.unit_group_exponent()
32
sage: Z64.unit_group_gens()
(63, 5)
sage: x=Z64(5)
sage: x.multiplicative_order()
16
```

1. Que pouvez-vous déduire de ces calculs concernant le groupe $(\mathbb{Z}/64\mathbb{Z})^\times$? En particulier est-il cyclique ?
2. Comment pourriez-vous déterminer si le groupe multiplicatif de $(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times$ est cyclique ou pas ?