Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

Master de mathématiques, 1re année

Deuxième TP

vendredi 19 septembre 2014
T. Coulbois

Nombres rationnels avec Sage

1 Période

$13/7 = 1.857142857142857142857142857142857142857\ldots$ On dit que le développement décimal de $13/7$ est périodique de période 6.

1. Donner la période des développements décimaux de $14/11$ et $18/37$.

2. Quelles sont les périodes possibles pour un nombre de la forme $a/7$, $a/11$, $a/21$?

3. Soit x un nombre périodique de période ℓ. Montrer que $(10^\ell - 1)x$ est un nombre décimal et donc que x est rationnel.

4. Pour $p \neq 2, 5$ un nombre premier et a un nombre premier avec p, montrer que la période de a/p est l'ordre de 10 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

5. Calculer l'ordre de 10 dans $\mathbb{Z}/373\mathbb{Z}$.

2 Addition des cancres

Pour $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux nombres rationnels réduits, on note $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, c'est l'addition des cancres.

Pour un réel x dans un intervalle à bornes rationnelles $[\frac{a}{b}; \frac{c}{d}]$, on compare x à $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$ et on garde celui des deux intervalles $[\frac{a}{b}; \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}]$ et $[\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}; \frac{c}{d}]$ qui contient x. On répète l'opération jusqu'à atteindre la précision désirée.

Écrire un programme Sage qui permet de répondre aux questions suivantes. Vous serez attentives/fs aux domaines de calcul utilisés par votre programme.

6. Donner un nombre rationnel approximant $\sqrt{2}$ avec une précision de 10^{-6}.

7. Donner les approximations successives de π par des nombres rationnels jusqu'à 10^{-6}.

3 Fractions continues

Pour une suite $a_0, a_1, \dots$ d'entiers, avec $a_0 \geq 0$ et $\forall i > 0$, $a_i > 0$, on définit les fractions continues

$$x_n = [a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + a_n}}} \quad \text{et} \quad x = \lim_{n \to +\infty} x_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

Par exemple $\frac{57}{17} = 3 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}$.

8. Tracer (avec `plot()`) la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ sur $]0; 1]$.

Pour un nombre x_0 son développement en fraction continue est donné par $a_n = \lfloor x_n \rfloor$, $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}$.

9. Donner le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$. Donner les 10 premiers termes du développement en fraction continue de π.

10. Soit x le nombre dont le développement en fraction continue est ultimement périodique : $[0, 2, 3, 7, 1, 5, 4, 1, 7, 1, 5, 4, 1, 7, 1, 5, 4, 1, 7, \dots]$. Donner une équation polynômiale dont x est racine.

4 Pour aller plus loin

4.1 Approximation d'un réel par un rationnel

Une approximation d'un nombre x par un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ est bonne si le dénominateur q n'est pas trop grand quand la précision $\epsilon = |x - \frac{p}{q}|$ est petite.

Avec l'addition des cancres ou avec le développement en fraction continue on obtient les meilleurs approximations d'un nombre x. La qualité de ces approximations dépend du nombre x.

11. Pour le nombre d'or $x = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et pour $x = \pi$ donner des majorants pour

$$\mu(x) = \inf\{q^2\epsilon \mid \epsilon = |x - \frac{p}{q}|, p, q \in \mathbb{Z}\}$$

12. Vérifier expérimentalement le théorème de LIOUVILLE : pour un nombre algébrique x de degré d, il existe une constante $C = C(x)$ telle que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, $|x - \frac{p}{q}| > \frac{C}{q^d}$

4.2 Groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ est constitué des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

13. Pour p premier quel est l'ordre de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times$?

14. Donner un générateur de $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/103\mathbb{Z}$.

15. Pour m et n premiers entre eux utiliser le théorème des restes chinois pour montrer que $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}^\times = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}^\times \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$.

```
Z32=Integers(32), Z32.unit_group_exponent(), Z32.unit_gens()
```

16. Décrire les groupes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}^\times$ et $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{Z}/81\mathbb{Z}^\times$.