Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université
Master de mathématiques, 1re année

Troisième TP

vendredi 3 octobre 2014
T. Coulbois

Sage une grosse calculatrice

1 Nombres entiers

`n.factorial(), n.factor(), n.divisors(),sum([1,2,3])`

1. Calculer 200! puis factoriser en nombres premiers.

2. Un nombre est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs (lui-même exclu). Écrire un programme permettant de trouver les nombres parfaits [1] figurant parmi les 500 premiers entiers.

Attention : Sage distingue les entiers de Python (`int`) utilisés comme compteurs dans les boucles et ses propres entiers (`sage.rings.integer.Integer`) avec lesquels il sait faire de l'arithmétique.

2 Variables et expressions symboliques

`var('k','n'), sum(k^2,k,1,7), sum(k^2,k,1,n), S.factor(), oo`

`p.expand(), p.derivative(), p.factor(), p.collect(a), p(a=5), p.coefficient(x,3)`

3. Calculer $1+4+\cdots+n^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

5. Développer $(1+x)^{15}$ puis dériver et factoriser le résultat obtenu.

6. Développer $(x^2+ax+b)^5$. Organiser les termes suivant les puisssances de a. Remplacer a par 5. Extraire le coefficient en x^3.

`solve(...)`

7. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 1 \\ x-y+z & = & 2 \\ x^2+1/y-1/z & = & 2 \end{array}\right.$$

1. on connaît beaucoup de nombres parfaits pairs que l'on sait caractériser à partir des nombres premiers de Mersenne premiers par $2^{n-1}(2^n-1)$ ssi 2^n-1 est premier. Par contre personne ne sait s'il existe des nombres parfaits impairs !

3 Un peu d'analyse

3.1 Courbes et surfaces

`plot(f,x,-10,10), polar_plot(r,theta,0,2*pi), parametric_plot((x,y),t,0,2*pi)`

`plot3d(...), implicit_plot3d(...)`

8. Tracer la courbe représentative de $\frac{\sin(x)}{x}$.

9. Déterminer graphiquement l'asymptote au voisinage de $+\infty$ de la courbe $\frac{\sqrt{x^3-2x+1}}{\sqrt{x-3}}$.

10. Tracer la cardioïde (epicycloïde à un rebroussement : $r(\theta) = 1 + \cos(\theta)$) et l'astroïde (hypocycloïde à quatre rebroussements, $x(t) = \cos^3(t), y(t) = \sin^3(t)$).

11. Tracer des hyperboloïdes de révolution à une et deux nappes ($z^2 = x^2 + y^2 \pm 1$), tracer un paraboloïde hyperbolique ($z = x^2 - y^2$)

12. Étudier graphiquement la différentiabilité en 0 de $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

3.2 Limites et dérivées

`limit(ln(x)/x,x=oo), (sin(x)).series(x==0,6), diff(sin(xy),x,2)`

13. Calculer :

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2+x+5}-5}{\sqrt{x+5}-3}, \quad \lim_{x\to+\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan(x))x, \quad \lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)}$$

14. Vérifier par un calcul de limite l'asymptote trouvée ci-dessus.

15. calculer les développements limités en 0 de

$$\ln(\cos(x)) \text{ à l'ordre } 6, \quad (1+x)^{\frac{1}{1+x}} \text{ à l'ordre } 3$$

16. Donner un équivalent en 0 de $\sin(\tan x) - \tan(\sin x)$

17. Calculer le laplacien de $\ln(x^2 + y^2)$

18. À un point de longitude λ et de lattitude ϕ la projection de MERCATOR fait correspondre le point du plan de coordonnées

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})) \end{cases}$$

Montrer qu'en tout point l'échelle verticale est égale à l'échelle horizontale.

4 Quelques matrices

`matrix(), determinant(), characteristic_polynomial(), eigenvectors_right(), jordan_form()`

19. Diagonaliser ou trigonaliser les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 18 \\ -8 & -3 & -15 \\ -5 & -1 & -11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 12 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -8 & 12 & 7 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -7 & -4 \\ -4 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

5 Polynômes

```
sage: QX=QQ['x']
sage: x=QX.gen()
sage: x.parent()
sage: p=(x-2)(x+3)
sage: p.parent()
```

20. Pour $n = 1, \dots, 20$ donnez les facteurs irréductibles (sur $\mathbb{Q}$) des polynômes $\Phi_n(X) = X^n - 1$.

21. Vérifier que les racines de $X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1$ sont les racines primitives 15[e] de l'unité `p.roots(QQbar)`.

22. Tracer la courbe paramétrique d'équation $\begin{cases} x = 1 - 3t^2 \\ y = t(3 - t^2) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

23. Calculer le résultant $R(x, y)$ des polynômes $x - 1 + 3t^2$ et $y - t(3 - t^2)$: `p.resultant(q,t)`.

Tracer la courbe $R(x, y) = 0$ avec `implicit_plot()`.

24. Tracer la cubique d'équation $3x^3 + 5xy^2 + 5x^2 - 5y^2 = 0$.

25. Pour une pente t, déterminer les coordonnées de l'intersection non-nulle de cette courbe avec la droite d'équation $y = tx$.

26. En déduire une paramétrisation de cette cubique.

5.1 Un peu de théorie de Galois

Considérons le polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

27. Avec `solve()` vérifier que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Vérifier que Sage connait les formules de Cardan. Rappeler ces formules.

28. Définir le corps $L = \mathbb{Q}[X]/P$ avec `NumberField(P)`. Vérfier que L est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ et donner son groupe de Galois.

29. Donner le groupe de Galois du corps de décomposition de $Q(x) = x^3 - x + 1$.