Université d'Aix-Marseille — Licence sciences et humanités

Optique, vision, couleur — **Symétries** — 16 mars 2015

Exercice I. On considère les permutations suivantes de l'ensemble $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$:

$$\alpha : \begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 4 \\ 2 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 2 \\ 4 & \mapsto & 5 \\ 5 & \mapsto & 1 \end{array} \quad \text{et } \beta : \begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 4 \\ 3 & \mapsto & 2 \\ 4 & \mapsto & 5 \\ 5 & \mapsto & 1 \end{array}$$

1. Calculer α^2 $(= \alpha \circ \alpha)$. **2.** Calculer α^{-1} **3.** Calculer $\alpha \circ \beta$ et $\beta \circ \alpha$.

Exercice II. Donner la liste des six permutations de l'ensemble $\{A; B; C\}$.

Exercice III. Soit G un groupe à quatre éléments (dont l'élément neure) : $G = \{e, a, b, c\}$).

1. Premier cas : On suppose que $ab = e$. En déduire successivement que

a. $ba = e$, **b.** c est son propre inverse : $c^{-1} = c$ (ou encore $c^2 = e$).

c. Donner la table de multiplication de G dans ce cas.

2. Deuxième cas : On suppose que $ab \neq e$. En déduire successivement que

a. $ab = c$, **b.** $ba \neq e$, **c.** $ba = c$

3. Deuxième cas, premier sous-cas : $ab \neq e$ et $a^2 = b$. Donner la table de multiplication de G.

4. Deuxième cas, deuxième sous-cas : $ab \neq e$ et $a^2 \neq b$. Déterminer a^2 puis donner la table de multiplication de G.

5. Montrer que les groupes obtenus aux questions 1. et 3. sont isomorphes.

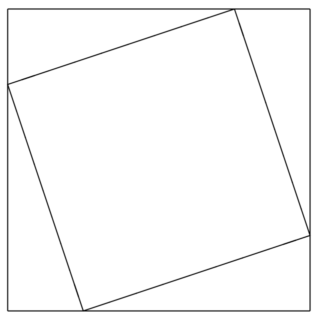
Exercice IV. **1.** Donner la liste des six isométries d'un triangle équilatéral.

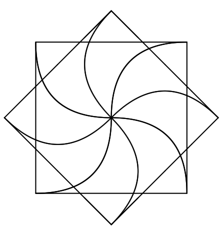
2. Donner la liste des huit isométries d'un carré.

3. Donner la liste des quatre isométries du dessin ci-contre

4. Montrer qu'il y a une bijection entre le groupe symétrique S_4 et le groupe des isométries d'un tétraèdre régulier.

5. Donner un dessin du plan qui a exactement trois symétries.





6. Donner les huit symétries du dessin ci-contre et montrer que ce ne sont pas les mêmes symétries que celles du carré.

7. Donner deux dessins du plan qui ont exactement dix symétries mais dont les groupes de symétries sont différents.

Exercice V. **1.** On se donne trois nombres x_1, x_2 et x_3 et on calcule $A = x_1 \cdot (x_2)^2 + x_2 \cdot (x_3)^2 + x_3 \cdot (x_1)^2$. Montrer que lorsqu'on permute ces trois nombres, A ne prend que deux valeurs.

2. Pour les quatre nombres 1, 3, 4 et -1 quelles sont toutes les valeurs que peut prendre $B = x_1 x_2 + x_3 x_4$.

3. **a.** Donner toutes les permutations σ de l'ensemble $\{1; 2; 3; 4\}$, tels que

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} + x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = -1.$$

b. Montrer que ces permutations forment un sous-groupe.

Exercice VI. **1.** **a.** Dans un tétraèdre régulier $ABCD$ on colorie les arêts $[AB]$ et $[CD]$ en rouge, les arêtes $[AC]$ et $[BD]$ en vert et les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ en bleu. Donner les symétries de ce tétraèdre coloré.

b. Décrire comment la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe (OA) (orienté par $\overrightarrow{OA}$) permute les couleurs (où O est le centre du tétraèdre).

c. Décrire comment la symétrie orthogonale par rapport au plan (ABI) permute les couleurs (où I est le milieu de de $[CD]$).

2. Montrer qu'il y a exactement deux manières de former un tétraèdre régulier avec les sommets d'un cube (vous ferez un beau dessin avec des couleurs).

3. Dans un cube $ABCDEFGH$, on colorie les sommets $ACFH$ en rouge et les autres sommets en vert. Donner les symétries directes du cube qui respectent les couleurs.

Exercice VII. **1.** Montrer que les multiples de 5 forment un sous-groupe de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

2. Dans le produit $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ avec $a = (1, 1)$ calculer a, $a + a$, $a + a + a$, etc. jusqu'à l'infini.

3. **a.** Montrer que $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont deux groupes commutatifs avec neuf éléments.

b. Montrer que pour tous les éléments a de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: $a + a + a = 0$, alors que pour $1 \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, $1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$.

4. Trouver le plus petit nombre n qui est simultanément congru à 2 modulo 11, à -1 modulo 21 et à 20 modulo 35.