

Exercice 1 Soit dans un espace métrique (X, d) une suite (x_n) telle que les trois sous-suites (x_{2n}) , (x_{2n+1}) , et (x_{3n}) convergent. Montrer que la suite elle-même converge.

Exercice 2 Soient f et g deux fonctions continues sur un espace métrique E . Montrer que l'ensemble

$$\{x \in E / 0 < f(x) < 5\}$$

est ouvert.

Montrer que l'ensemble $\{x \in E / g(x) \leq f(x)\}$ est fermé.

Exercice 3 Soient (E, d) un espace métrique et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in E / f(x) < \lambda\}$ et $\{x \in E / f(x) > \lambda\}$ sont des ouverts de E .

Exercice 4 Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Plus généralement montrer que l'ensemble des matrices de rang $\geq r$ (avec $0 \leq r \leq n$) est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ (considérer la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \det(M + tI_n)$ pour $M \in M_n(\mathbb{R})$).

Exercice 5 Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction continue vérifiant $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (1, 1)$. Montrer que l'image de γ rencontre le cercle unité S^1 ainsi que le losange L de sommets $(\pm 1, 5, 0)$ et $(0, \pm 1, 5)$.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que le graphe de f est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Est-ce que la réciproque est vraie ? (considérer la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$)

Exercice 7

- Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de réels $x_n = (1 + \frac{1}{n}) \sin(n\frac{\pi}{6})$.
- Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} si α est irrationnel. En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $x_n = \cos(2\pi n\alpha)$.
(Indication : on pourra montrer que tout sous-groupe fermé de \mathbb{R} est soit \mathbb{R} , soit discret, de la forme $a\mathbb{Z}$.)
- Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Une période de f est un réel T tel que $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des période de f est un sous-groupe de \mathbb{R} .
- On suppose que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et que $T > 0$ est une période de f . Montrer que si f n'est pas constante, alors le groupe des périodes de f est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Donner un exemple de fonction non continue admettant un sous-groupe dense de \mathbb{R} comme groupe de périodes.

Exercice 8 Soit E un espace métrique et $(a_n)_n$ une suite de E . Pour tout entier n on pose

$$A_n := \{a_m / m \geq n\}.$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (a_n) est $\bigcap_{n \geq 0} \overline{A_n}$. en déduire que cet ensemble est fermé.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) := \frac{x - y}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f(0, 0) = 0.$$

Cette application est-elle continue ?

Exercice 10

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que e^{iu_n} et $e^{i\sqrt{2}u_n}$ convergent. Montrer que (u_n) a au plus une valeur d'adhérence.
2. Soit (u_n) une suite réelle telle que e^{itu_n} converge pour $t \in T$ où T est non dénombrable. Même conclusion.

Exercice 11 *Grappe d'une application continue.*

Soit $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ continue.

- 1) Montrer que le graphe de f est fermé dans $X \times X'$ et homéomorphe à X .
- 2) Soit $g : (X, d) \rightarrow (X', d')$ également continue. Montrer que $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X .

Exercice 12 Montrer que la propriété de continuité d'une application entre espaces métriques est conservée en remplaçant la métrique par une métrique équivalente, aussi bien à la source qu'au but de l'application.

Exercice 13 On considère un espace normé $(E, \|\cdot\|)$.

- 1) Vérifier que $x \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|}$ réalise un homéomorphisme de E sur la boule unité ouverte de E . Expliciter l'homéomorphisme réciproque.
- 2) Montrer que la boule unité ouverte pour la norme euclidienne dans \mathbb{R}^3 , $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ est homéomorphe au cube ouvert $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sup(|x|, |y|, |z|) < 1\}$. Expliciter cet homéomorphisme.
- 3) Même question pour la boule et le cube fermés. En déduire que la sphère unité et le bord du cube sont homéomorphes. On explicitera l'homéomorphisme.

Exercice 14 *Formes linéaires continues et hyperplans fermés.*

E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel.

- 1) Soit f une forme linéaire non nulle sur E et H son noyau. Montrer qu'il existe $a \in E$, $a \neq 0$, tel que $E = H \oplus \mathbb{R}a$. Réciproquement, si H est un sous-espace vectoriel de E qui admet un supplémentaire de dimension un, montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle sur E de noyau H .
- 2) Montrer qu'une forme linéaire non nulle sur E est continue si et seulement si son noyau est fermé. Indication : on pourra montrer que si $f(a) > 0$ alors il existe $\rho > 0$ tel que $\forall y \in B(a, \rho)$, $f(y) > 0$, puis que f est bornée sur $B(0, \rho)$.
- 3) Soit H un hyperplan fermé de E et a un vecteur de E n'appartenant pas à H . Montrer que E est somme directe topologique de H et de $\mathbb{R}a$ (i.e. par définition que les deux projecteurs associés à la somme directe sont continus).
- 4) Montrer qu'un hyperplan H est sous-espace vectoriel de E maximal pour l'inclusion. En déduire qu'un hyperplan est soit fermé soit dense dans E .
- 5) Soit H un hyperplan fermé et f une forme linéaire continue associée (pourquoi **une**?). Montrer que pour tout $a \in E$, on a $d(a, H) = \frac{|f(a)|}{\|f\|}$.

Exercice 15 Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$ une application continue surjective et A une partie dense de E . Montrer que $f(A)$ est dense dans F .

Exercice 16 Soit (E, d) un espace métrique.

1. Pour toute partie A non vide de E , montrer que l'application

$$d_A : x \mapsto d_A(x) = d(x, A)$$

est continue de E dans \mathbb{R} .

2. Soient F et G deux fermés disjoints de E . En utilisant les fonctions d_F et d_G , construire une fonction continue f de E dans $[0, 1]$ qui vaut 0 sur F et 1 sur G .

Exercice 17 Montrer que les projections π_E et π_F de $E \times F$ sur E et F respectivement sont continues. Montrer qu'une application $f : G \rightarrow E \times F$ est continue si et seulement si $\pi_E \circ f$ et $\pi_F \circ f$ le sont.

En déduire que si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux applications continues, alors la fonction $h : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$

définie par $h(x, y) = \sin(f(x)^2 g(y)^3)$ est continue.

Exercice 18 Soient E et F deux espaces métriques et une application $f : E \rightarrow F$. Montrer que f est continue si et seulement si pour toute partie A de E on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 19 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux constantes positives a et b telles que

$$|f(x)| \leq a\|x\| + b \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 20 Soit E un ensemble muni de la métrique discrète : $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. Quelles sont ses parties compactes ? Quelles sont ses parties fermées et bornées.

Exercice 21 Soit K une partie compacte incluse dans le demi-plan supérieur de \mathbb{R}^2 : $K \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in K$ on ait $y \geq r$

- i) en utilisant la propriété de Bolzano-Weierstrass,
- ii) en considérant les parties $\{(x, y) \in K / y > t\}$.

La propriété reste-t-elle vraie si l'on suppose uniquement K fermé ?

Exercice 22 Montrer que $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / M^t M = I_n\}$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 23 Soit K un espace métrique compact.

- i) Montrer qu'une suite (u_n) dans K converge si et seulement si elle admet au plus une valeur d'adhérence.
- ii) Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans $[0, 1]$. Supposons que la suite $(u_n v_n)$ converge vers 1. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 24 Montrer que l'ensemble formé des termes d'une suite convergente et de sa limite est un ensemble compact.

Exercice 25 Soit E un espace métrique et soient A et B deux parties de E . On définit

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) / x \in A, y \in B\}.$$

Montrer que si A et B sont disjointes et compactes alors $d(A, B) > 0$. Montrer que cela reste vrai si on suppose seulement que A est compacte et B fermée. Montrer que cela est faux si on suppose seulement A et B fermées.

Exercice 26 Soit X un espace métrique.

- i) Soit (F_n) une suite décroissante de fermés de X et soit (x_n) une suite convergente de X telle que $x_n \in F_n$ pour tout entier n . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \bigcap_{n \geq 0} F_n.$$

Donner un exemple où $\bigcap_{n \geq 0} F_n = \emptyset$.

- ii) Soit (K_n) une suite décroissante de compacts non vides de X . Montrer que $K = \bigcap K_n$ est non vide et que si Ω est un ouvert contenant K , il contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

Exercice 27 Soit E est un espace vectoriel normé. Si A et B sont deux parties de E on a $A + B$ l'ensemble $\{a + b / a \in A, b \in B\}$.

- i) Montrer que si A est fermée et B est compacte alors $A + B$ est fermée.
- ii) Donner un exemple de deux fermés de \mathbb{R} dont la somme n'est pas fermée.

Exercice 28 Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E tel que $0 \notin K$. Notons

$$F = \{\lambda x / \lambda \in \mathbb{R}^+, x \in K\}.$$

Montrer que F est fermé.

Exercice 29 Soient A une partie compacte d'un espace métrique (E, d) et $f : A \rightarrow A$ telle que : $\forall x, y \in A, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

- i) Montrer que f admet un unique point fixe $a \in A$.
- ii) Soit (x_n) une suite d'éléments de A telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier n . Montrer que cette suite converge vers a .

Exercice 30 Soit K un espace métrique compact et soit $f : K \rightarrow K$.

- i) On suppose que pour tous $x, y \in K, d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Montrer que f est surjective. (Indications : étudier la suite $(f^n(x))_n$)
- ii) On suppose que pour tous $x, y \in K, d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ et que f est continue. Montrer que f est une isométrie surjective.

Exercice 31 Soit X un espace topologique compact et $C(X)$ l'espace des fonctions réelles continues sur X avec la norme uniforme.

Soit J un idéal propre de $C(X)$; on va montrer par l'absurde que toutes les fonctions de J s'annulent en un même point de X .

1. Sinon, montrer qu'on peut trouver n points de $X, x_1, \dots, x_n, V_1, \dots, V_n$ où V_i voisinage de x_i et n fonctions de J, f_1, \dots, f_n tels que

$$X = \cup_i V_i, f_i|_{V_i} \neq 0.$$

2. Construire alors une fonction g dans J ne s'annulant jamais et en déduire que $\mathbf{1} \in J$, d'où la contradiction.

Exercice 32 Soit $S_+^2 := \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0\}$ l'hémisphère supérieur de la boule unité dans \mathbb{R}^3 . On note $i : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_+^2$ l'application qui associe au point de coordonnées (x, y) le point de S_+^2 sur la droite reliant $(1, x, y)$ à l'origine de \mathbb{R}^3

- i) Vérifier que $i(\mathbb{R}^2)$ est dense dans S_+^2 et que i est un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 sur $i(\mathbb{R}^2)$ (muni de la topologie induite par \mathbb{R}^3 sur S_+^2). On dit que la donnée de (i, S_+^2) est une compactification de \mathbb{R}^2 .
- ii) À quelle condition une suite $(i(x_n, y_n))$ converge-t-elle vers le point de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ de S_+^2 ?