Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie et analyse

Devoir à la maison
28 septembre 2014

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Vous apporterez un grand soin à la rédaction

Enseignants : T. Coulbois, L. Paoluzzi, G. Rond

Exercice I. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ on considère le cercle C de centre l'origine et de rayon 1. Pour deux points p et q du cercle C, on définit la distance de p à q (notée $d(p,q)$) comme étant égale à la longueur du plus petit arc de cercle reliant p à q.

1. Calculer $d((1,0),(0,1))$, $d((0,1),(-1,0))$ et $d((-1,0),(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2))$. Comparer la somme de ces distances avec $d((1,0),(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2))$ (et faites un dessin).

2. Calculer $d((0,1),(x,y))$ où $(x,y) \in C$ et $x,\ y > 0$.

Exercice II. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$.

1. Montrer que f n'est ni injective ni surjective.

2. Caculer $f(]-3,1[)$, $f^{-1}(]-3;2])$, $f^{-1}(f([1;2]))$.

3. l'équivalence $x < y \iff x^2 < y^2$ est-elle vraie ? Justifier.

Exercice III. Pour chacune des affirmations suivantes donner une démonstration ou un contrexemple. Dans le cas où l'égalité entre deux parties n'est pas vraie en général, préciser et justifier si une inclusion est vérifiée.

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Soit $f : E \to F$ une application, A et B des parties de E et C et D des parties de F.

3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

4. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

5. $f(A) \subseteq f(B) \Rightarrow A \subseteq B$

6. $f(f^{-1}(C)) = C$

7. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

8. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$