

Vous apporterez un grand soin à la rédaction

Enseignants : T. Coulbois, L. Paoluzzi, G. Rond

Exercice I. Soit F un fermé d'un espace métrique (E, d) . Montrer que pour toute partie A de E on a l'équivalence :

$$A \cup F = E \iff \overset{\circ}{A} \cup F = E.$$

Exercice II. Soit E et F deux espaces métriques et une application $f : E \rightarrow F$.

1. Montrer que si f est continue alors pour toute partie A de E on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
2. Montrer la réciproque : si pour toute partie A de E on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ alors f est continue (on pourra, par exemple, montrer que l'image réciproque d'une partie fermée B est fermée en posant $A = f^{-1}(B)$ et en montrant que $f(\overline{A}) \subset B$).

Exercice III. 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(0, 1)$ est la boule fermée $B_f = \{u \in E \mid \|u\| \leq 1\}$.

2. Soit (E, d) un espace métrique, x un point de E et $r > 0$. Prouver ou réfuter l'affirmation suivante : L'adhérence de la boule ouverte de centre x et rayon r est la boule fermée de centre x et de rayon r .