Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie et analyse

Devoir à la maison
mardi 25 novembre 2014

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Vous apporterez un grand soin à la rédaction

Enseignants : T. Coulbois, L. Paoluzzi, G. Rond

Exercice I. Théorèmes de Dini

Soit K un ensemble compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que

(i). $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : K \to \mathbb{R}$ est continue ;

(ii). la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$.

(iii). pour chaque $x \in K$ la suite de nombres réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Nous allons montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur K.

1. Pour $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ montrer que $V_{n,\epsilon} = \{x \in K \mid 0 \leq f_n(x) - f(x) < \epsilon\}$ est ouvert.

2. Montrer que pour chaque $\epsilon > 0$ les $(V_{n,\epsilon})_{n\in\mathbb{N}}$ forment un recouvrement ouvert de K.

3. Conclure.

Exercice II. Distance de Hausdorff

Pour une partie non-vide A de $\mathbb{R}^2$ et un point $M \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$\delta(M, A) = \inf\{d(M, P) \mid P \in A\}.$$

où d est la distance euclidienne.

On considère $O = (0, 0)$ l'origine de $\mathbb{R}^2$, $I = (1, 1)$, $C = \mathcal{C}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque unité.

1. Calculer $\delta(O, C)$, $\delta(O, D)$, $\delta(I, C)$.

2. Montrer que si A est compact non-vide alors pour tout point M de $\mathbb{R}^2$ il existe un point $Q = Q(M) \in A$ tel que $\delta(M, A) = d(M, Q)$. En déduire que $\delta(M, A) = 0 \iff M \in A$.

3. Montrer cela reste vrai si nous supposons seulement que A est fermé (et non-vide).

4. Montrer que pour un compact A de $\mathbb{R}^2$, l'application $M \mapsto \delta(M, A)$ est continue.

Pour deux compacts non-vide K et K' de $\mathbb{R}^2$, on définit

$$\Delta(K, K') = \sup\{\delta(M, K') \mid M \in K\} + \sup\{\delta(M', K) \mid M' \in K'\}.$$

5. Calculer $\Delta(\{O\}, C)$, $\Delta(C, D)$, $\Delta(C, C')$ où $C' = \mathcal{C}(I, 3))$ est le cercle de centre I et de rayon 3.

6. Montrer que pour deux compacts non-vide K et K' de $\mathbb{R}^2$, il existe des points $P \in K$ et $P' \in K'$ tels que $\Delta(K, K') = \delta(P, K') + \delta(P', K)$.

7. Montrer que pour deux compacts non-vide K et K', $\Delta(K, K') = 0 \iff K = K'$.

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des compacts non-vide de $\mathbb{R}^2$.

8. Montrer que Δ est une distance sur $\mathcal{H}$.

9. Soit $\mathcal{P}_n$ le n-gone régulier dont les sommets sont les points d'affixes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Montrer que la suite de compacts $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers C pour la métrique Δ.