Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie

Examen
Mercredi 14 janvier 2015

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Trois heures, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : T. Coulbois, L. Paoluzzi, G. Rond

Exercice I. **1.** Soit (E,d) un espace métrique. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
2. Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que la distance est une application lipschitzienne de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.
3. Soit (E,d) un espace métrique compact et F un fermé de E. Montrer que F est compact.
4. Montrer que l'image d'un connexe par une application continue est connexe.
5. Donner un exemple, en justifiant, d'un espace qui n'est pas complet.

Exercice II. Soient (E,d) un espace métrique et A et B deux parties de E. Montrer que $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est égal à l'intérieur de $A \cap B$.

L'ouvert $\mathring{A}\cap\mathring{B}$ est contenu dans $A\cap B$ et donc il est contenu dans le plus grand ouvert contenu dans $A \cap B$, à savoir dans son intérieur. Pour l'autre inclusion, $x \in A \cap B$ appartient à l'intérieur de $A \cap B$ si et seulement s'il existe une boule $B(x,r)$ centrée en x et contenue dans $A\cap B$. La boule $B(x,r)$ est alors contenue dans A et dans B ce qui montre que x appartient à $\mathring{A}$ et à $\mathring{B}$ et donc à $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Exercice III. Soient f et g deux applications continues de (E,d) dans (F,d'), espaces métriques.
1. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in E \ / \ f(x) = g(x)\}$$

est fermé dans E.

Il suffit de montrer que la diagonale $\Delta = \{(x',y') \in F\times F \mid x' = y'\}$de l'espace métrique $F \times F$ est fermée. En effet, A est l'image inverse de Δ par l'application continue $f \times g$ définie sur $E \times E$ et à valeurs dans $F \times F$ par $(x,y) \mapsto (f(x), g(y))$ –notons que la continuité de cette application découle de celle de ces composantes f et g–.
Pour montrer que Δ est fermée il faut et suffit de montrer que son complémentaire $F\times F\setminus\Delta$ est ouvert. Soit $(x',y') \notin \Delta$. Puisque $x' \neq y'$ on a $d'((x',y') = d > 0$. Il en suit que les boules $B(x',d/3)$ et $B(y',d/3)$ sont disjointes. Le produit $B(x',d/3)\times B(y',d/3)$ est une boule de $F \setminus \Delta$ centrée en (x',y') et disjointe de Δ.

2. En déduire que si f et g coïncident sur une partie dense de E alors $f = g$.

Soit A défini comme au point précedent et D la partie dense sur laquelle on sait que $f = g$. Par definition on a $D \subset A \subset E$. En prenant les adhérences on a $\bar{D} \subset \bar{A} \subset \bar{E}$. Or A et E étant fermés on a $\bar{A} = A$ et $\bar{E} = E$, et puisque D est dense dans E on a aussi $\bar{D} = E$ d'où on déduit $E = A$, ce qui prouve $f = g$ partout.

Exercice IV. Soient (E,d) un espace compact et (F,d') un espace métrique quelconque. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application localement bornée (i.e. pour tout $x \in E$ il existe $r > 0$

tel que $f(B(x,r))$ est borné dans F). Montrer que f est bornée sur E (c'est-à-dire que $f(E)$ est borné dans F).

Soit $y \in F$. Par hypothèse on sait que pour tout $x \in E$ il existe $r_x > 0$ et une boule $B(y, R_x)$ telle que $f(B(x, r_x)) \subset B(y, R_x)$. La famille $\{B(x, r_x)\}_{x \in E}$ est un recouvrement ouvert de l'espace compact E. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $B(x_1, r_{x_1}), B(x_2, r_{x_2}), \ldots, B(x_n, r_{x_n})$. Puisque $E = \cup_{k=1}^n B(x_k, r_{x_k})$ on a que $f(E) = \cup_{k=1}^n f(B(x_k, r_{x_k}))$ et donc $f(E) \subset \cup_{k=1}^n B(y, R_{x_k}) \subset B(y, R)$ où $R = \max_{k=1}^n R_{x_k}$: l'image est donc bornée.

Exercice V. Soit $d : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$d(x,y) = |e^x - e^y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que d définie une distance sur $\mathbb{R}$.

Puisque $(a,b) \mapsto |a-b|$ est une distance sur $\mathbb{R}$ et que l'exponentielle est une application injective on déduit que d est une distance (les trois axiomes sont vérifiés car cela est le cas pour $(a,b) \mapsto |a-b|$, la seule chose à remarquer étant que $d(x,y) = 0$ seulement si $x = y$ à cause de l'injectivité)).

2. Montrer que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

La suite $(-n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour d mais elle ne converge pas.

Exercice VI. Considérons la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$T = \{0\} \times [-1,1] \cup [-1,1] \times \{0\} = I_1 \cup I_2$$

où $I_1 = \{(0,y) \, |y \in [-1;1]\}$ et $I_2 = \{(x,0) \, |x \in [-1;1]\}$.

1. Montrer que T est compacte.

Il s'agit d'une union finie de compactes (deux segments fermés et bornés) qui est donc compacte.

2. Montrer que T est connexe.

L'ensemble T est obtenue comme union de deux enembles connexes (deux segments) ayant intersection non vide, à savoir $\{(0,0)\}$.

3. Soit $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, montrer que $f(T)$ est un segment.

Puisque T est compact et connexe ainsi doit l'être son image par une application continue. Les compacts connexes de $\mathbb{R}$ étant les intervalles fermés et bornés, la conclusion suit.

4. Déterminer les points $x \in T$ pour lesquels $T \backslash \{x\}$ est connexe.

Il s'agit des quatre points $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$. Il n'est pas difficile de voir que pour tout autre point x, $T \setminus \{x\}$ n'est pas connexe.

5. Montrer que T n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Si une telle partie A existait, elle devrait contenir quatre points a_i, $i = 1,2,3,4$, ayant la propriété que $A \setminus \{a_i\}$ est connexe. Or, d'après le troisième point, A doit être un segment (c'est-à-dire un intervalle fermé et borné) qui contient seulement deux points (ses extrémités) ayant la propriété voulue. Un tel A ne peut donc pas exister.