Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie

Examen 2e session
lundi 29 juin 2015

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Trois heures, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : T. Coulbois, L. Paoluzzi, G. Rond

Exercice I. (Cours : 6 points) On considère un espace métrique (E, d).
1. a. Rappeler la définition d'un ouvert de E.
b. Montrer qu'une union d'ouverts est un ouvert.
2. a. Donner la définition d'une suite de Cauchy.
b. Donner la caractérisation séquentielle de la compacité.
c. Montrer que si E est compact alors il est complet.

Exercice II. Soient A et B deux parties d'un espace métrique (E, d). Montrer que $\overline{A} \cup \overline{B}$ est égal à l'adhérence de $A \cup B$.

$\overline{A} \cup \overline{B}$ est la réunion de deux fermés, c'est donc une partie fermée de E.
$\overline{A} \cup \overline{B}$ contient $\overline{A}$ qui contient A et $\overline{B}$ qui contient B. Donc $\overline{A} \cup \overline{B}$ contient $A \cup B$.
L'adhérence $\overline{A \cup B}$ de $A \cup B$ est le plus petit fermé qui contient $A \cup B$.
Nous avons donc montré l'inclusion $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.
Montrons l'inclusion réciproque.
$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
$\overline{A \cup B}$ est un fermé qui contient A.
Donc $\overline{A}$ est inclus dans $\overline{A \cup B}$.
De même nous montrerions que $\overline{B}$ est inclus dans $\overline{A \cup B}$.
Et nous pouvons déduire que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.
Ces deux inclusions prouvent que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

Exercice III. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques compacts. Montrer que $E \times E'$ est compact muni de la distance

$$\delta((x, x'), (y, y')) := \max\{d(x, y), d'(x', y')\}.$$

Soit $(z_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite de points de $E \times E'$. Pour chaque n nous notons $z_n = (x_n, x'_n)$ avec $x_n \in E$ et $x'_n \in E'$. Comme E est compact, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire que $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante) qui converge vers un point x de E.
Comme E' est compact, il existe une suite extraite $(x'_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(x'_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point x' de E'.
La suite $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E est extraite de la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Elle converge donc aussi vers x.
La suite $(z_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc dans $E \times E'$ vers $z = (x, x')$:
En effet fixons $\epsilon > 0$. Comme $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans E il existe N tel que pour tout $n \geq N$,

$$d(x_{\varphi(\psi(n))}, x) < \epsilon$$

De même, il existe N' tel que pour tout $n \geq N'$,

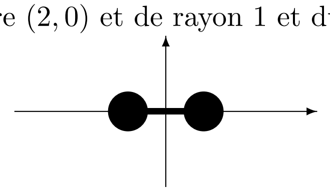
$$d'(x'_{\varphi(\psi(n))}, x') < \epsilon$$

Posons $M = \max(N, N')$. Alors pour tout $n \geq M$,

$$\delta(z_{\varphi(\psi(n))}, z) = \max\{d(x_{\varphi(\psi(n))}, x); d'(x'_{\varphi(\psi(n))}, x')\} < \epsilon.$$

Exercice IV. Donner un exemple d'une partie connexe du plan dont l'intérieur n'est pas connexe.

Prenons l'haltère H composée du disque de centre $(-2, 0)$ et de rayon 1, du disque de centre $(2, 0)$ et de rayon 1 et du segment $[-2; 2] \times \{0\}$:

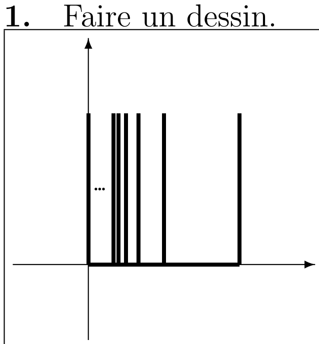


H est manifestement connexe par arcs alors que son intérieur est composé des deux disques ouverts de centres $(-2, 0)$ et $(2, 0)$ et de rayon 1 qui n'est pas connexe.

Exercice V. On considère la partie suivante de $\mathbb{R}^2$:

$$P = \big([0; 1] \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times [0; 1]\big) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \big(\{\frac{1}{n}\} \times [0; 1]\big)$$

1. Faire un dessin.



2. Montrer que P est compact.

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de P. Et soit pour chaque n, $M_n = (x_n, y_n)$ les coordonnées de M_n. Nous remarquons d'abord que $x_n \in [0;1]$ et donc quitte à extraire la suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre $x \in [0;1]$.
S'il y a une infinité de n pour lesquels $y_n = 0$ alors quitte à extraire pour tout n, $y_n = 0$ et la suite de points $(M_n)_n \in \mathbb{N}$ converge vers le point $M = (x, 0)$ qui appartient bien au peigne P.
Sinon, quitte à extraire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in]0;1]$ et donc, vu la définition de P, $x_n \in \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Cet ensemble de nombre réels est fermé donc il contient aussi la limite x.
Finalement, comme $[0;1]$ est compact, quitte à extraire la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre $y \in [0;1]$ et le point $M = (x, y) \in P$.
Nous avons ainsi une suite de points qui converge vers un point de P. Ce qui est la caractérisation séquentielle des compacts (propriété de Bolzano-Weierstrass. Nous avons démontré que P est compact.

Exercice VI. Soit $d : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+.$$

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}_+$.

d est bien une fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Elle est clairement symétrique. Vérifions l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\forall x,y,z \in \mathbb{R}_+,\ d(x,z) = \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+z}\right| &= \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1+z}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| + \left|\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1+z}\right| = d(x,y) + d(y,z).\end{aligned}$$

Finalement pour $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$d(x,y) = 0 \iff \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| = 0 \iff \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+y} \iff x = y.$$

Ce qui démontre que d est une distance sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que $(\mathbb{R}_+, d)$ n'est pas complet.

Considérons la suite de terme général $x_n = n$. Alors pour tout $n \geq m > 0$,

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{1}{1+n} - \frac{1}{1+m}\right| \leq \frac{1}{1+n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N = \frac{1}{\epsilon}$, tel que pour tout $n, m \geq N$:

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{1+N} \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \leq \epsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy.
Si $(\mathbb{R}_+, d)$ était complet elle aurait une limite $x \in \mathbb{R}_+$ et nous aurions

$$\lim_{n\to+\infty} d(n,x) = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{1+n} - \frac{1}{1+x}\right| = \frac{1}{1+x} = 0.$$

Ce qui est impossible.
Par l'absurde nous avons donc démontré que $(\mathbb{R}_+, d)$ n'est pas complet.

Exercice VII. **1.** Donner la définition d'une fonction 1-lipschitzienne $f : [0;1] \to \mathbb{R}$.

La fonction f est 1-lipschitzienne, si pour tout $x, y \in [0;1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

2. Montrer que la fonction, $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est 1-lipschitzienne sur $[0;1]$.

La fonction $f : \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+x} \end{array}$ est dérivable et pour tout $x \in [0;1]$, $f'(x) =$ $frac1(1+x)^2$. La fonction dérivée prend donc ses valeurs dans $[\frac{1}{4};1]$, le théorème des accroissements finis, nous permet donc d'écrire :

$$\forall x, y \in [0;1],\ \exists \xi \in [0;1],\ |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y| \leq |x-y|.$$

Ce qui prouve que f est 1-lipschitzienne.

3. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas 1-lipschitzienne.

Considérons la fonction $g : \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$, $x = 0$ et $y = \frac{1}{4}$. Alors

$$|g(x) - g(y)| = |0 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = |x - y|.$$

Ce qui démontre que g n'est pas 1-lipschitzienne.

Exercice VIII. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé que l'on suppose complet. Soit $B : E \times E \longrightarrow E$ une application bilinéraire continue. On rappelle qu'alors

$$\exists C >, \ \forall x, y \in E \ : \ \ \|B(x,y)\| \leq C\|x\| \, \|y\|.$$

Soit $a \in E$ tel que $\|a\| < \frac{1}{8C}$. On se propose de montrer que l'équation

$$x = a + B(x,x) \tag{1}$$

possède une solution $x \in E$.

1. Justifier l'identité

$$B(x,x) - B(y,y) = \frac{1}{2}\left(B(x-y, x+y) + B(x+y, x-y)\right).$$

Calculons par bilinéarité :

$$\begin{aligned} & B(x-y, x+y) + B(x+y, x-y) \\ &= \big(B(x,x) - B(y,y) + B(x,y) - B(y,x)\big) + \big((B(x,x) - B(y,y) - B(x,y) + B(y,x)\big) \\ &= 2B(x,x) - 2B(y,y), \end{aligned}$$

ce qui est bien l'identité proposée.

2. En déduire que pour tout $r > 0$ l'application $\phi : x \longmapsto a + B(x,x)$ est $2Cr$-lipschitzienne dans la boule $\overline{B}(0,r)$.

Calculons de nouveau avec $x, y \in \overline{B}(0,r)$:

$$\begin{aligned} & \|\phi(x) - \phi(y)\| = \|a + B(x,x) - (a + B(y,y))\| = \|B(x,x) - B(y,y)\| \\ &= \frac{1}{2}\|B(x-y, x+y) + B(x+y, x-y)\| \leq \frac{1}{2}\big(\|B(x-y,x+y)\| + \|B(x+y,x-y)\|\big) \\ &\leq \frac{1}{2}\big(C\|x-y\| \, \|x+y\| + C\|x+y\| \, \|x-y\|\big) = C\|x-y\| \, \|x+y\| \leq C\|x-y\| \, (\|x\| + \|y\|) \\ &\leq 2Cr\|x-y\| \end{aligned}$$

Ce qui démontre que ϕ est $2Cr$-lipschitzienne.

3. Résoudre l'inégalité $2Cr^2 - r + \|a\| \leq 0$. Trouver ensuite $0 < r_1 < r_2$ tels que pour tout $r \in [r_1, r_2]$ on a

$$\|x\| \leq r \Longrightarrow \|a + B(x,x)\| \leq r.$$

Le polynôme de degré 2 est négatif à l'intérieur des racines les solutions sont

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 8\|a\|C}}{4C} \leq r \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 8\|a\|C}}{4C} = r_2.$$

Notons que les nombres sous les racines carrées sont strictement positif d'après l'hypothèse sur a et que $0 < r_1 < r_2$.
Rappelons que $\phi(0) = a$ et que ϕ est $2Cr$-lipschitzienne dans la boule $\overline{B}(0,r)$. Donc pour tout x dans la boule $\overline{B}(0,r)$,

$$\|\phi(x)\| \leq \|a\| + 2Cr\|x\| \leq \|a\| + 2Cr^2 \leq r$$

4. Trouver un réel $r > 0$ tel que ϕ soit contractante dans la boule $\overline{B}(0,r)$.

Pour $r = r_1 < \frac{1}{4C} < \frac{1}{2C}$. D'après la question 3, ϕ envoie la boule $\overline{B}(0,r)$ dans elle-même. De plus, d'après la question 2, dans la boule $\overline{B}(0,r)$, ϕ est $2Cr$-lipschitzienne et $2Cr < 1$. Nous concluons que ϕ est contractante dans la boule $\overline{B}(0,r)$.

5. En déduire que l'équation (1) possède une solution $x \in A$. Cette solution est-elle unique ?

D'après la question précédente, ϕ admet un unique point fixe x dans la boule $\overline{B}(0,r)$ qui est un espace complet.
En revanche nous ne pouvons rien affirmer concernant l'unicité de cette solution dans E.