Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie

Examen
Mercredi 14 janvier 2015

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Trois heures, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : T. Coulbois, L. Paoluzzi, G. Rond

Exercice I. **1.** Soit (E,d) un espace métrique. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
2. Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que la distance est une application lipschitzienne de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.
3. Soit (E,d) un espace métrique compact et F un fermé de E. Montrer que F est compact.
4. Montrer que l'image d'un connexe par une application continue est connexe.
5. Donner un exemple, en justifiant, d'un espace qui n'est pas complet.

Exercice II. Soient (E,d) un espace métrique et A et B deux parties de E. Montrer que $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est égal à l'intérieur de $A \cap B$.

Exercice III. Soient f et g deux applications continues de (E,d) dans (F,d'), espaces métriques.
1. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in E \ / \ f(x) = g(x)\}$$

est fermé dans E.
2. En déduire que si f et g coïncident sur une partie dense de E alors $f = g$.

Exercice IV. Soient (E,d) un espace compact et (F,d') un espace métrique quelconque. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application localement bornée (i.e. pour tout $x \in E$ il existe $r > 0$ tel que $f(B(x,r))$ est borné dans F). Montrer que f est bornée sur E (c'est-à-dire que $f(E)$ est borné dans F).

Exercice V. Soit $d : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$d(x,y) = |e^x - e^y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que d définie une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

Exercice VI. Considérons la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$T = \{0\} \times [-1,1] \cup [-1,1] \times \{0\} = I_1 \cup I_2$$

où $I_1 = \{(0,y) \ |y \in [-1;1]\}$ et $I_2 = \{(x,0) \ |x \in [-1;1]\}$.
1. Montrer que T est compacte.
2. Montrer que T est connexe.
3. Soit $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, montrer que $f(T)$ est un segment.
4. Déterminer les points $x \in T$ pour lesquels $T \backslash \{x\}$ est connexe.
5. Montrer que T n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.