Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie

Examen 2e session
lundi 29 juin 2015

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Trois heures, ni calculatrices, ni documents Enseignants : T. Coulbois, L. Paoluzzi, G. Rond

Exercice I. **(Cours : 6 points)** On considère un espace métrique (E, d).

1. a. Rappeler la définition d'un ouvert de E.
b. Montrer qu'une union d'ouverts est un ouvert.
2. a. Donner la définition d'une suite de Cauchy.
b. Donner la caractérisation séquentielle de la compacité.
c. Montrer que si E est compact alors il est complet.

Exercice II. Soient A et B deux parties d'un espace métrique (E, d). Montrer que $\overline{A} \cup \overline{B}$ est égal à l'adhérence de $A \cup B$.

Exercice III. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques compacts. Montrer que $E \times E'$ est compact muni de la distance

$$\delta((x, x'), (y, y')) := \max\{d(x, y), d'(x', y')\}.$$

Exercice IV. Donner un exemple d'une partie connexe du plan dont l'intérieur n'est pas connexe.

Exercice V. On considère la partie suivante de $\mathbb{R}^2$:

$$P = \big([0; 1] \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times [0; 1]\big) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \big(\{\frac{1}{n}\} \times [0; 1]\big)$$

1. Faire un dessin.
2. Montrer que P est compact.

Exercice VI. Soit $d : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+.$$

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $(\mathbb{R}_+, d)$ n'est pas complet.

Exercice VII. **1.** Donner la définition d'une fonction 1-lipschitzienne $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction, $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est 1-lipschitzienne sur $[0; 1]$.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas 1-lipschitzienne.

Tournez la page

Exercice VIII. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé que l'on suppose complet. Soit $B : E \times E \longrightarrow E$ une application bilinéaire continue. On rappelle qu'alors

$$\exists C >, \ \forall x, y \in E \ : \quad \|B(x,y)\| \leq C\|x\| \, \|y\|.$$

Soit $a \in E$ tel que $\|a\| < \frac{1}{8C}$. On se propose de montrer que l'équation

$$x = a + B(x,x) \tag{1}$$

possède une solution $x \in E$.

1. Justifier l'identité

$$B(x,x) - B(y,y) = \frac{1}{2}\left(B(x-y, x+y) + B(x+y, x-y)\right).$$

2. En déduire que pour tout $r > 0$ l'application $\phi : x \longmapsto a + B(x,x)$ est $2Cr$-lipschitzienne dans la boule $\overline{B}(0,r)$.

3. Résoudre l'inégalité $2Cr^2 - r + \|a\| \leq 0$. Trouver ensuite $0 < r_1 < r_2$ tels que pour tout $r \in [r_1, r_2]$ on a

$$\|x\| \leq r \Longrightarrow \|a + B(x,x)\| \leq r.$$

4. Trouver un réel $r > 0$ tel que ϕ soit contractante dans la boule $\overline{B}(0,r)$.

5. En déduire que l'équation (1) possède une solution $x \in A$. Cette solution est-elle unique ?